Finite Mechanik oszillierender Bewegung

Bachelorarbeit aus der Physik

Vorgelegt von
Frank Ulrich Henning
28. August 2023

Institut für Theoretische Physik I
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Betreuer:
Prof. Dr. Klaus Mecke

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Frank Ulrich Henning, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Verwendete Hilfsmittel und Textpassagen, die wörtlich oder dem Sinn nach auf Publikationen oder Vorträgen anderer Autoren beruhen, habe ich nach bestem Gewissen als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum Frank Ulrich Henning

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **1**

2. Finiter projektiver Raum **2**
2.1. Axiomatischer Zugang 2
2.2. Analytischer Zugang 4
2.3. Projektive Quadrik 10
2.4. Projektivitäten 14

3. Newtonsche Gesetze im finiten projektiven Raum **17**

4. Legendre-Transformation **24**
4.1. Legendre-Transformation im reellen Raum 24
4.2. Legendre-Transformation im finiten projektiven Raum 28

5. Flache Raumzeit im finiten projektiven Raum **32**

6. Harmonischer Oszillator **43**

7. Fazit **62**

Anhang **64**

A. Zur Biquadrik **64**

B. Zum Rechnen mit Projektivitäten **66**

C. Ergänzende Abbildungen zu Abschnitt 5 **68**

D. Algebraischer Beweis zur Punktspiegelungsmethode **69**

E. Zum erstellten Python-Modul **70**

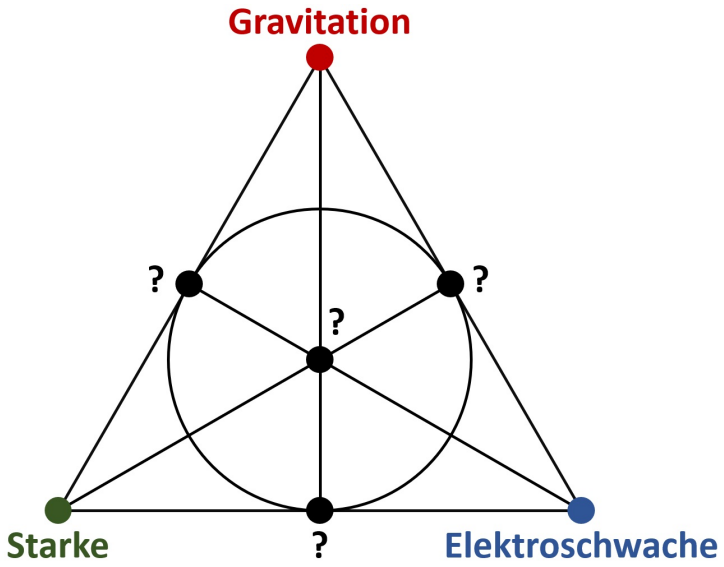
Abbildungsverzeichnis **71**

Literaturverzeichnis **74**

1. Einleitung

Mit Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie (ART) hat sich gezeigt, dass das was wir als Gravitations-"Kraft" beobachten, also dass zwei Massen sich gegenseitig anziehen und daraufhin aufeinander zu fallen, letztlich eine Interpretation dessen ist, dass die Bewegung kräftefreier Objekte durch die Geometrie der Raumzeit diktiert wird. Die Newtonsche Gravitations-"Kraft" wurde also geometrisiert. Somit sollte man die Frage stellen, ob auch andere physikalische Gesetzmäßigkeiten geometrisiert werden können, bzw. ob sie auf eine gemeinsame Urgeometrie zurückgeführt werden können. Denn dann sollte es doch vermutlich möglich sein Gemeinsamkeiten verschiedener Gebiete der Physik, sofern vorhanden, leichter zu erkennen, als wie wenn die Gebiete der Physik auf völlig unterschiedlichen mathematischen Gebilden ihren jeweiligen mathematischen Dialekt zur adäquaten Beschreibung der Natur sprechen. Eine mögliche gemeinsame Sprache und somit ein möglicher Kandidat für eine solche Urgeometrie, aus der verschiedene mathematische Dialekte herausentwickelt werden können, stellt die projektive Geometrie dar. Denn "die projektive Geometrie ist ein umfassender Ansatz, der gleichermaßen die Euklidische und auch die Nicht-Euklidischen Geometrien durch Spezifikationen beschreiben kann" [1]. Speziell die finite projektive Geometrie soll im Folgenden die Sprache sein, mittels der Physik betrieben werden soll. Denn sie kann auf einer minimal gehaltenen Anzahl von Axiomen aufgebaut werden und schließlich koordinatisiert werden, um somit Methoden der linearen Algebra nutzen zu können. Sollte die finite projektive Geometrie i.d.T. die gemeinsame Sprache der physikalischen Gebiete sein, so könnte mit ihr für die Physik selbst womöglich eine Inzidenzstruktur gefunden werden. Diese könnte wie es in unten stehender Abbildung[1] durch die kleinste finite projektive Geometrie angedeutet wird, aussehen und man könnte Goethe umformulieren zu:

Auf welche Art und Weise ist das "WAS die Welt im inneren zusammenhält" [2] gegeben?



Jedoch ist das Ziel dieser Arbeit eine finite Mechanik oszillierender Bewegung.

[1] Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint.

2. Finiter projektiver Raum

Der mathematische Rahmen, die finite projektive Geometrie bzw. Raum, der für diese Arbeit nötig ist kann über zwei Wege konstruiert werden und zwar durch den axiomatischen und analytischen Zugang. Die Resultate beider Wege sind i.d.T. nach dem Theorem von Veblen und Jung zu einander isomorph für projektive Räume der Dimension $d > 2$ (vgl. [3]). Im folgenden wird ein nicht strickt mathematisch strenger Weg gewählt, der eine Art gemischten Zugang skizziert, sodass wichtige Konzepte hervorgehoben werden. Jedoch wird versucht, an entsprechenden Stellen mit einer mathematischen Präzision zu arbeiten.

2.1. Axiomatischer Zugang

Definition 2.1 (Relation [4])**.**
Eine Relation $\mathcal{I}$ über zwei Mengen A und B ist ein Tripel $(A, B, \mathcal{I})$, mit $\mathcal{I} \subseteq A \times B$.

Definition 2.2 (Geometrie [5], [6])**.** Eine Geometrie ist ein Paar $\mathcal{G} = (\Omega, \mathcal{I})$, wobei Ω eine Menge ist und $\mathcal{I} \subset \Omega \times \Omega$ eine Relation ist, mit den Eigenschaften:

(s) (symmetrisch) $(x, y) \in \mathcal{I} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{I}$ und

(r) (reflexiv) $(x, x) \in \mathcal{I} \quad (\forall x \in \Omega)$.

Man nennt x und y, sofern $(x, y) \in \mathcal{I}$ gilt, inzident.

Diese Definition des Begriffs Geometrie erscheint zunächst recht abstrakt, aber stellt man sich - nicht formal gerecht - unter der Menge von Objekten Ω Punkte und Linien vor und unter der Relation $\mathcal{I}$ Konstruktionsvorschriften für den Umgang mit Zirkel und Lineal, so ist man dem Begriff Geometrie, den man aus der Schule kennt, nicht allzu fern. Die obige formale Definition ist aber in dieser Form nötig, um den Begriff der finiten projektiven Geometrie logisch strukturiert aufzubauen. Weiter ist er nötig, um mit den nachfolgenden Definitionen an ihm anzuknüpfen, damit dann in Unterabschnitt 2.2 die Parallelen zum analytischen Zugang erkennbar werden.

Definition 2.3 ((Maximale) Fahne [5])**.** Eine Fahne $\mathcal{F}$ einer Geometrie $\mathcal{G} = (\Omega, \mathcal{I})$ ist eine Menge von Elemeznten aus Ω, die paarweise inzident sind.

$$\mathcal{F} : maximal \Longleftrightarrow [(\nexists\, x \in \Omega \setminus \mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{F} \cup \{x\} : Fahne\,].$$

Definition 2.4 (Rang & Typ [5])**.** Sei $\mathcal{F}$ eine maximale Fahne. Eine Geometrie $\mathcal{G} = (\Omega, \mathcal{I})$ heißt vom Rang r, falls die Menge Ω in r disjunkte Mengen Ω_i zerfällt:

$$rang(\mathcal{G}) = r \Longleftrightarrow [\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{r} \Omega_i \ \wedge \ (\forall \mathcal{F} \in \mathcal{G})(\forall\, \Omega_i \in \Omega)(\exists!\, x \in \Omega_i) \quad x \in \mathcal{F}\,].$$

Die Elemente aus Ω_i sind dann vom Typ i.

Beispiel 2.1. (Rang [5])
Ein Würfel besteht aus Ecken $=: \Omega_1$, aus Kanten $=: \Omega_2$ und aus Seitenflächen $=: \Omega_3$ und bildet eine Geometrie vom Rang 3.

Definition 2.5 (Inzidenzstruktur [5])**.** Eine Geometrie $\mathcal{G}$ mit $rang(\mathcal{G}) = 2$ heißt Inzidenzstruktur und ist ein Tripel $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, dabei ist

- $\mathcal{X}$ eine Menge von Objekten vom Typ 1,
- $\mathcal{L}$ eine Menge von Objekten von Typ 2 und
- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{L}$ eine Menge von Relationen, deren Elemente Inzidenzen genannt werden.

Für ein physikalisch sinnvolles geometrisches Modell bietet es sich an, Objekte vom Typ 1 als Punkte aufzufassen, wobei sie Ereignisse der Raumzeit markieren sollen (vgl. [1]).

Definition 2.6 (Projektiver Raum [5], [6])**.** Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ heißt projektiver Raum, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

(PR1) $(\forall\, (x \neq y) \in \mathcal{X})(\exists!\, l \in \mathcal{L}) \quad (x, l) \in \mathcal{I} \wedge (y, l) \in \mathcal{I}$, d.h.:

Für je zwei verschiedene Punkte gibt es genau ein Objekt vom Typ 2, dass mit beiden inzidiert. Somit soll das von den zwei Punkten festgelegte Objekt vom Typ 2 fortan als Linie bezeichnet werden und als $l := x \wedge y$ notiert werden.

(PR2) $(\forall\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{X}) \quad (p, l_{1,2}) \in \mathcal{I} \wedge (p, l_{3,4}) \in \mathcal{I} \Rightarrow (q, l_{1,3}) \in \mathcal{I} \wedge (q, l_{2,4}) \in \mathcal{I}$, wobei $(p \neq q) \in \mathcal{X}$ und $l_{i,j} = x_i \wedge x_j \in \mathcal{L}$, d.h.:

Für je vier Punkte soll gelten, dass

wenn die Linien $l_{1,2}$ und $l_{3,4}$ mit einem Punkt $p \in \mathcal{X}$ inzidieren,

dann inzidieren auch die Linien $l_{1,3}$ und $l_{2,4}$ mit einem Punkt $q \in \mathcal{X}$.

(PR3) $(\forall\, l \in \mathcal{L})(\exists^{\geq 3}\, x \in \mathcal{X}) \quad (x, l) \in \mathcal{I}$, d.h.:

Je eine Linie inzidiert mit mindestens drei Punkten.

Streng genommen muss noch ein viertes Axiom (PR4: Es gibt mindestens zwei verschiedene Linien) erfüllt sein, sodass der projektive Raum als nichtausgeartet bezeichnet werden darf. Allerdings handelt es sich bei ausgearteten projektiven Räumen um exotische Spezialfälle, die hiermit implizit durch "Verzicht" auf das vierte Axiom ausgeschlossen werden sollen.

Definition 2.7 (Projektive Ebene [5])**.** Ein projektiver Raum, in dem statt Axiom (PR2) das Axiom (PR2$'$) gilt, heißt projektive Ebene.

(PR2$'$) $(\forall\, (g \neq h) \in \mathcal{L})(\exists!\, x \in \mathcal{X}) \quad (g, x) \in \mathcal{I} \wedge (h, x) \in \mathcal{I}$, d.h.:

Für je zwei verschiedene Linien gibt es genau einen Punkt, der mit beiden inzidiert.

Vergleicht man (PR1) mit (PR2$'$), so stellt man direkt eine Dualität bzw. Symmetrie zwischen Punkten und Linien innerhalb einer projektiven Ebene fest. Denn von einem Axiom gelangt man zum jeweils anderen, in dem man innerhalb der Quantoren-Aussagen die Bezeichnungen der Punkte mit denen der Linien vertauscht. Eine ähnliche Dualität findet man auch für den projektiven Raum, welche im Abschnitt 4 erläutert werden wird. Jedenfalls kann man hier erkennen, dass wenn man eine Aussage innerhalb einer projektiven Ebene bewiesen hat, so erhält man die dazu duale Aussage indem man die Begriffe Punkte und Linien vertauscht und aus dieser dualen Aussage können dann andersartige Schlüsse gezogen werden.

Um den projektiven Raum $\mathcal{P}$ koordinatisieren zu können müsste man an dieser Stelle zunächst die Begriffe Linearmenge, (Un)abhängigkeit von Punkten und die Basis von $\mathcal{P}$ einführen, um die Dimension von $\mathcal{P}$ zu quantifizieren (vgl. [5] S. 8 bis 17). Anschließend stellt man fest, dass der Satz von Desargues (vgl. [5] S. 58) in einem projektiven Raum der Dimension > 2 i.d.T. gilt. Weiter gibt es projektive Ebenen, die nicht desarguessche sind. Diese sind aber exotischer Natur und sollen somit ausgeschlossen sein. Abschließend muss man noch feststellen, dass alle desarguessche Geometrien koordinatisierbar über einem Schiefkörper (vgl. [6] S. 21) sind.

Ein Schiefkörper oder auch Divisionsring genannt, besitzt alle Eigenschaften eines Körpers, bis auf dass die Multiplikation nicht kommutieren muss (vgl. [7]). Nach dem Satz von Wedderburn ist ein endlicher Schiefkörper ein Körper (vgl. [7]). D.h. einen endlichen Schiefkörper zu wählen ist aus mathematischer Sicht sinnvoll, da beim analytischen Zugang ein Vektorraum nötig sein wird und das kartesische Produkt von Körpern ist dann ein Vektorraum über dem Körper (vgl. [8]). Aus physikalischer Sicht ist es ebenfalls sinnvoll, wenn man wie es hier getan wird, dem finiten Weltbild von Mecke folgt, denn in diesem wird "die Welt als [ein] Prozess von elementaren Ereignissen [aufgefasst], in dem die Anordnung der *endlich* vielen vergangenen Ereignisse, d. h. der *punktartigen* Elemente der Welt als 'Raum', 'Zeit' oder 'Materie' erscheinen [soll]" [1].

Definition 2.8 (Finiter projektiver Raum [5])**.** Ein projektiver Raum $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ heißt finit, wenn seine Punktmenge $\mathcal{X}$ eine endliche Anzahl von Elementen hat.

Es sei noch bemerkt, dass Geometrien, die pappossch sind, d.h. dass der Satz von Pappos (vgl. [5] S.60) auf ihnen gilt, über Körpern koordinatisiert werden können. Somit hätte man statt einem Schiefkörper auch die reellen Zahlen wählen können, um den projektiven Raum zu koordinatisieren, jedoch wäre dies nicht im Sinne dieser Arbeit gewesen. Insbesondere da dann weitere Axiome bzw. ein ganzes Axiomensystem nötig gewesen wären, wie zum Beispiel Hilberts-Anordnungsaxiome (vgl. [9] S. 66 bis 67), die für endliche Körper nicht gelten, da sie zyklisch sind. An dieser Stelle wird somit ersichtlich, dass die finite projektive Geometrie eine minimale Bühne bietet, auf der gearbeitet werden soll (vgl. [10]).

2.2. Analytischer Zugang

Es sollen also finite Körper sein, auf denen innerhalb dieser Arbeit operiert wird. Somit lohnt es sich an dieser Stelle ausgewählte Eigenschaften dieser festzuhalten.

Theorem 2.1 (Fakten endlicher Körper)**.**
Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper, $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dann gilt[2]:

- $|\mathbb{K}| = p^n$ (vgl. Kapitel 4 in [11]).

  Dieser Körper ist dann bis auf Isomorphie eindeutig. Somit wird er als $\mathbb{K}_{p^n}$ notiert.

- $(\forall\, n)\ \mathbb{K}_{p^n}$: *Körpererweiterung*[3] *von* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (vgl. Proposition 5.10 in [11]).

  Da $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$ ist, wird dieser als $\mathbb{K}_p$ notiert[4] (vgl. Korollar 1.12 in [11]).

- Die Charakteristik[5] $char(\mathbb{K}_{p^n}) = p\ \ (\forall\, n)$ (vgl. [12]).

Im Folgenden soll der endlichen Körper $\mathbb{K}_p = \left\{-\frac{1}{2}(p-1), \dots, 0, \dots, \frac{1}{2}(p-1)\right\}$ der Einfachheit halber benutzt werden. Jedoch sollte man im Hinterkopf behalten, dass falls nötig, hier

noch ein gewisser Spielraum hinsichtlich der Körpererweiterung ($n > 1$) besteht. Da $\mathbb{K}_p$ nach Theorem 2.1 ein Körper ist, ist $\mathbb{K}_p^{d+1} := \{(x_0, ..., x_d) \,|\, x_i \in \mathbb{K}_p)\}$ ein $\mathbb{K}_p^{d+1}$-Vektorraum, da er die entsprechenden Eigenschaften erfüllt (vgl. [8]).

Seine Elemente werden mit $\underline{x}$ notiert.

Definition 2.9 (Äquivalenzrelation [4])**.**
Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation $\sim \subseteq M \times M$ auf einer Menge M, welche folgende Eigenschaften hat:

(r) (reflexiv) $(\forall\, x \in M)$ $x \sim x$,

(s) (symmetrisch) $(\forall\, x, y \in M)$ $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ und

(t) (transitiv) $(\forall\, x, y, z \in M)$ $[x \sim y \wedge y \sim z] \Rightarrow x \sim z$.

Definition 2.10 (Äquivalenzklasse [4])**.**
Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzklasse ist die Teilmenge:

$$[x] := \{y \in M \,|\, y \sim x\} \subseteq M \text{ aller zu } x \in M \text{ äquivalenten Elemente.}$$

Korollar 2.1. Sei M eine Menge und sei $M/\!\sim\; := \{[x] \,|\, x \in M\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen, dann gilt für die Äquivalenzklassen $[a], [b] \subset M/\!\sim$:

$$[a] = [b] \overset{(t)}{\Longleftrightarrow}{}^{(r)} a \sim b \qquad (\textit{Beweis:} \text{ vgl. [4]}).$$

Korollar 2.2. Die Zusammenfassung äquivalenter Elemente in Äquivalenzklassen induziert eine Zerlegung der Menge M über der die Äquivalenzrelation definiert ist, sodass gilt:

(Z1) $(\forall\, [x] \in M/\!\sim)$ $[x] \neq \{\}$

(Z2) $(\forall\, [x], [y] \in M/\!\sim)$ $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \{\}$

(Z3) $\bigcup M/\!\sim\; = M$ (*Beweis:* vgl. [4]).

D.h. die Äquivalenzrelation teilt M restlos in disjunkte Äquivalenzklassen auf.

Wendet man nun die Definition 2.9 und 2.10 auf den $(d+1)$-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}_p^{d+1}$ an, so ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 2.11 (Koordinatisierter finiter projektiver Raum [6] & [14])**.**
Sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{K}_p^{d+1}$ derart gegeben, sodass gilt:

- $\underline{x} \sim \underline{y} \Longleftrightarrow (\exists\, \lambda \in \mathbb{K}_p \setminus \{0\})$ $\underline{x} = \lambda \underline{y}$, dann ist
- $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d := (\mathbb{K}_p^{d+1} \setminus \{0\})/\sim\; = \left\{[\underline{x}] \,|\, \underline{x} \in \mathbb{K}_p^{d+1}\right\} \setminus \{0\}$

ein koordinatisierter finiter projektiver Raum.

[2] Mit $\mathbb{P}$ ist die Menge der Primzahlen gemeint und mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

[3] Die jeweiligen Körper $\mathbb{K}_{p^n}$ haben für $n \geq 2$ nichts mit den jeweiligen Restklassenringen zu tun (vgl. [13]) und damit muss dann eine "neue" Multiplikation konstruiert werden, ähnlich wie es bei den Quaternionen der Fall ist (vgl. [6]).

[4] Mit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =: \mathbb{K}_p$ ist ein Restklassenring gemeint, der für $p \in \mathbb{P}$ ein Körper ist und auch als Restklassenkörper modulo p bezeichnet wird.

[5] Mit Charakteristik eines Körpers ist die kleinste natürlich Zahl $n > 0$ gemeint, für die $n \cdot 1 := 1 + 1 + ... + 1 = 0$ gilt.

Korollar 2.3 (Koordinatisierter finiter projektiver Raum [5])**.**
Den so definierten Raum als finiten projektiven zu bezeichnen ist sinnvoll, da wenn man:

seine Elemente als Punkte auffasst, welche 1-dimensionale Unterräume von $\mathbb{K}_p^{d+1}$ sind,

seine Linien entsprechend als 2-dimensionale Unterräume von $\mathbb{K}_p^{d+1}$ und

die Inzidenz von $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ als mengentheoretisches Enthaltensein,

so kann man zeigen, dass für $(d+1) \geq 3$ der $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ ein nicht ausgearteter projektiver Raum ist, im Sinne der Axiome (PR1), (PR2) und (PR3). Außerdem gilt in ihm der Satz von Desargues, da dieser projektive Raum über dem Vektorraum $\mathbb{K}_p^{d+1}$ konstruiert wurde und dieser wiederum über einem Schiefkörper $\mathbb{K}_p$, welcher, weil er endlich ist, ein Körper ist. Weiter zeigt man, dass $dim(\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d) = d$ ist (*Beweise:* vgl. [5] S.54, S.58 & S.55).

Der finite projektive Raum $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ ist also die Menge aller Äquivalenzklassen und nach Korollar 2.2 kann jede Äquivalenzklasse $[\underline{x}] \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ durch ein beliebiges Element $\underline{x} \in [\underline{x}]$ aus dieser eindeutig bestimmt, also repräsentiert werden (vgl. [4]).

Definition 2.12 (Repräsentantensystem [4])**.** Ein Repräsentantensystem ist die Teilmenge:

$$R := \left\{ \underline{r} \,|\, (\forall\, [\underline{x}] \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d)(\exists!\, \underline{r} \in \mathbb{K}_p^{d+1}) \quad \underline{r} \sim \underline{x} \in [\underline{x}] \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \right\} \subset \mathbb{K}_p^{d+1}.$$

D.h. R enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element.

Definition 2.13 (homogene Koordinaten)**.** Sei $\underline{r} \in R$ ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[\underline{r}]$. Weiter sei $\underline{r} = \lambda \cdot \underline{x}$. Dann folgt mit Korollar 2.1, dass:

$$\begin{aligned} [\underline{x}] &\equiv [\underline{r}] \\ [\underline{x}] &= [\lambda \cdot \underline{x}] \\ [(x_0, \dots, x_d)^T] &= [(\lambda x_0, \dots, \lambda x_d)^T]\,. \end{aligned}$$

Fasst man nun $[x_0, \dots, x_d]^T$ als homogene Koordinaten des Punktes $[\underline{x}] \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ auf, so gilt:

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_d]^T &= \lambda \cdot [x_0, \dots, x_d]^T \\ \hat{x} &= \lambda \cdot \hat{x}\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Diese Aussage scheint zunächst unsinnig, jedoch ist mit:

$$\hat{x} := [x_0, \dots, x_d]^T \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d = \left\{ \left[(x_0, \dots, x_d)^T\right] \,|\, (x_0, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}_p^{d+1} \setminus \{0\} \right\} \tag{2.2}$$

gemeint, dass für einen Punkt des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ homogene Koordinaten gewählt wurden. Denn sowohl mit $\hat{x} = [x_0, \dots, x_d]^T$ lässt sich die Äquivalenzklasse $[\underline{x}]$ eindeutig bestimmen, als auch mit $\lambda \cdot \hat{x} = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_d]^T =: [r_0, \dots, r_d]^T =: \hat{r}$ lässt sich die Äquivalenzklasse $[\underline{r}] \equiv [\underline{x}]$ eindeutig bestimmen, da $\underline{r} = \lambda \cdot \underline{x}$ ist.

Mit der Angabe von homogenen Koordinaten $\hat{x} = [x_0, \dots, x_d]^T$ lässt sich also genau ein Punkt des finiten projektiven Raums identifizieren. Somit lässt er sich umformulieren zu:

$$\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d = \dot{\bigcup_{n=0}^{d}} \mathcal{U}\mathbb{K}_p^n := \dot{\bigcup_{n=0}^{d}} \left\{ [x_0, \dots, x_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \dots, 0_d]^T \,|\, x_i \in \mathbb{K}_p \right\}\,. \tag{2.3}$$

Der $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ ist als Vereinigung von disjunkt liegenden n-dimensonalen affinen Unterräumen[6] $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^n$ vom zugrundeliegenden Vektorraum $\mathbb{K}_p^{d+1}$ auffassbar (vgl. [6] S. 32 & [14] S. 2).

Beispiel 2.2. Speziell für $(d+1) = 3$ ergeben sich:

- $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^0 = \left\{[1,0,0]^T\right\} = \underline{0} + \hat{e}_0 = \text{ein Punkt}\big|_{\hat{e}_0}$,
- $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^1 = \left\{[x_0,1,0]^T \mid x_i \in \mathbb{K}_p\right\} = U_1 + \hat{e}_1 = \text{eine Linie}\big|_{\hat{e}_1}$ und
- $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2 = \left\{[x_0,x_1,1]^T \mid x_i \in \mathbb{K}_p\right\} = U_2 + \hat{e}_2 = \text{eine Fläche}\big|_{\hat{e}_2}$.

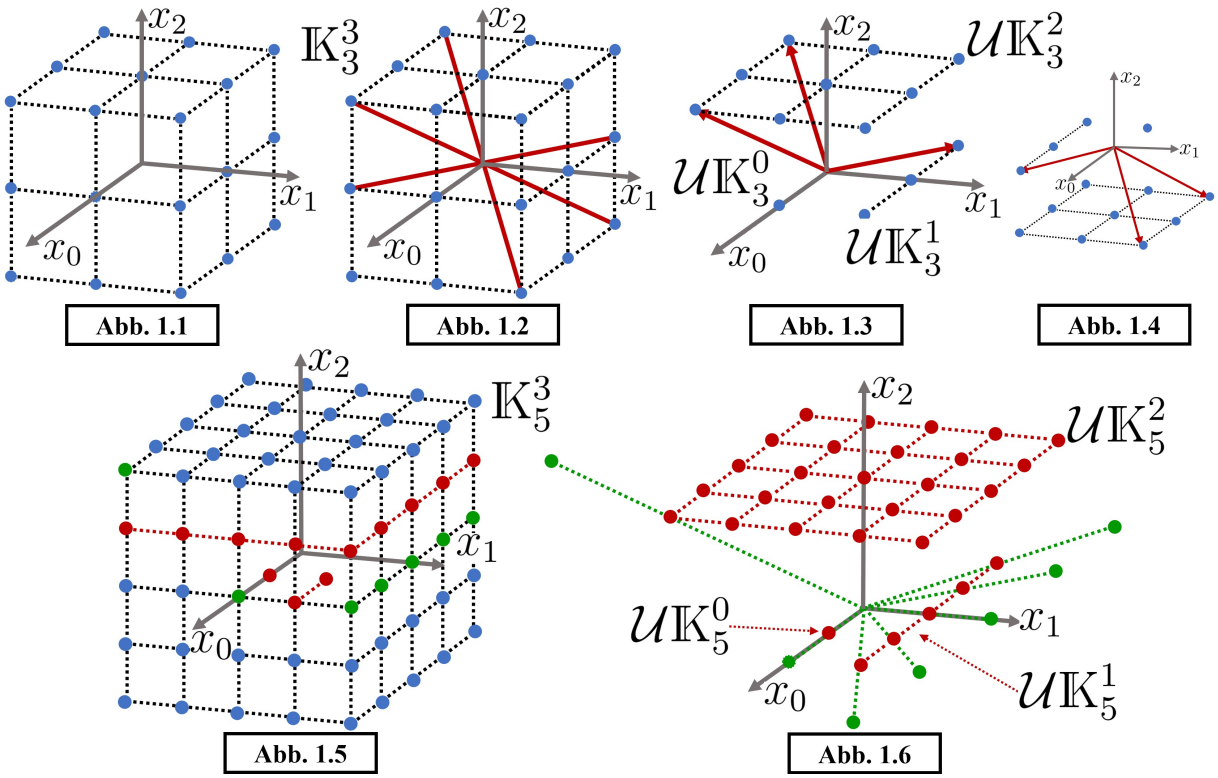


Abbildung 1: In Abb. 1.1 sind die Punkte des $\mathbb{K}_3^3$ in blau aufgetragen. In Abb. 1.2 sind drei Äquivalenzklassen nach Definition 2.11 mit durchgezogenen roten Linien angedeutet. Abb. 1.3 zeigt die nach Gleichung (2.3) gewählte Konvention, wobei drei Repräsentanten der drei Äquivalenzklassen aus Abb. 1.2 beispielhaft in rot eingezeichnet sind. Dabei wurden ihnen normierte homogene Koordinaten entsprechend nach Gleichung (2.3) zugewiesen. Abb. 1.4 zeigt eine alternative Konvention. In Abb. Abb. 1.5 sind Punkte des $\mathbb{K}_5^3$ aufgetragen, welche nach Wahl der homogenen Koordinaten nach Gleichung (2.3) in Abb. 1.6 (rote Punkte) übergehen. In Abb. 1.6 sind mit grünen Linien Zentralprojektionen angedeutet, welche die gewählten Repräsentanten (rote Punkte) nach Gleichung (2.1) auf ein anderes Element innerhalb der jeweiligen Äquivalenzklasse überführen. Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint.

Dabei ist die Darstellung der Räume in Abb. 1 mit Vorsicht zu genießen, denn mit $\hat{e}_i = [0_0, \dots 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_d]^T$ ist zwar die kanonische Basis gemeint, allerdings wurde im bisherigen mathematischen Konstrukt keine Metrik definiert oder induziert und somit auch insbesondere keine Längen- oder Winkelmessung. Deshalb sind die Abstände der Punkte zueinander noch nicht existent. Den Punkten $\hat{x} = [x_0, \dots, x_d]^T \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden lediglich Zahlen-Tupel zugewiesen, um sie über eine wohldefinierte Art und Weise zu

[6] Ein affiner Unterraum ist eine Teilmenge, hier $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^n$, des zugrundeliegenden Vektorraums, hier $\mathbb{K}_p^{d+1}$, die sich aus einem Untervektorraum, hier U_n und einem Stützvektor, hier $\hat{e}_n$, zusammensetzt (vgl. [15]).

identifizieren. Weiter wurde mit der Äquivalenzrelation in Definition 2.11 festgelegt, dass aus einem Repräsentant die entsprechend anderen Elemente der Äquivalenzklasse aus ihm hervorgehen, durch skalare Multiplikation mit einem $\lambda \in \mathbb{K}_p$. Somit sollte man im Hinterkopf behalten, dass die grünen Punkte in Abb. 1.5 und somit ihre normierten Repräsentanten, die roten Punkte in Abb. 1.6, durch Zentralprojektion (mit gestrichelten grünen Linien angedeutet) in nicht normierte homogene Koordinaten, die grünen Punkte in Abb. 1.6 überführt werden.

Außerdem ist in Abb. 1.6 erkennbar, dass die 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{K}_p^{d+1}\big|_{p=5}^{d=2}$-Vektorraums, also diejenigen Äquivalenzklassen, die durch homogene Koordinaten der Form $[x_0, x_1, 1]^T$ repräsentiert werden, Punkte auf der affinen Ebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d\big|_{p=5}^{d=2}$ festlegen. Dabei durchstoßen diese speziellen Äquivalenzklassen diese affine Ebene. Dieser Vorgang verhält sich für höhere Dimensionen analog. Denn diejenigen 1-dimensionalen Unterräume, die mit homogenen Koordinaten der Form $[x_0, x_1, \dots, x_d = 1]^T$ verknüpft sind, legen Punkte auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ fest. Versucht man sich dies geometrisch vorzustellen, so stößt man sicherlich an seine Grenzen für Dimensionen $(d+1) > 3$, jedoch kann man sich folgenden Gedankengang zu nutze machen, um auf höhere Dimensionen qualitativ plausibel zu extrapolieren. Man stelle sich einen Würfel vor, der von einer Linie durchstoßen wird. Im geometrischen Denken des Alltags kommt man dann zu einer Linie, die den Würfel durchzieht und nicht zu einem ausgezeichneten Punkt innerhalb des Würfels. Jedoch hat man bei einem solchen Gedankengang analog zu folgendem Beispiel gedacht und zwar, dass man eine Linie in eine Ebene legt, auf der man Durchstoßpunkte erhalten möchte. Dann ist es nicht verwunderlich, dass man statt Punkten, eine Linie erhält. Somit sollte man es sich so vorstellen, dass man aus der Dimension $(d+1)$ mit einer Linie kommt und die Dimension d durchstößt. Denn dann wird i.d.T. von einer Linie der dazu korrespondierende ausgezeichnete Durchstoßpunkt festgelegt. Damit kann man folgende Klassifizierung von Punkten, bzw. 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{K}_p^{d+1}$ also Äquivalenzklassen, des finiten projektiven Raums $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ treffen.

Definition 2.14. (Punkte im Unendlichen) Sei $\hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$, dann heißen Punkte der Form:

- $\hat{x} = [x_0, x_1, \dots, x_d = 1]^T$ reguläre Punkte und
- $\hat{x} = [x_0, x_1, \dots, x_d = 0]^T$ Punkte im Unendlichen, bzw. Fernpunkte.

Die regulären Punkte, also diejenigen die die affine Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ festlegen, legen somit den d-dimensionalen Anschauungsraum $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ fest, der in einem $(d+1)$-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}_p^{d+1}$ eingebettet ist. Dabei gibt es neben den regulären Punkten weitere Punkte im Unendlichen, deren Hinzunahme zum $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ innerhalb des $\mathbb{K}_p^{d+1}$ auch als der projektive Abschluss bezeichnet wird und zum $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ führt, im Sinne sodass gilt:

$$\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d = \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \setminus H^\infty, \text{ wobei} \tag{2.4}$$

$$H^\infty := \left\{\hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \,|\, x_d = 0\right\} \text{ ist.} \tag{2.5}$$

Mit dieser Betrachtungsweise ist es möglich, die Gleichwertigkeit der beiden Zugänge, axiomatischer und analytischer, in Abbildung 2 zu visualisieren. Denn in Abbildung 2 links ist die projektive Geometrie eingebettet als eine affine Ebene in einem Vektorraum mit ihren Fernpunkten dargestellt. In Abbildung 2 rechts, ist die gleiche projektive Geometrie, repräsentiert durch Punkte und Linien, zu sehen (vgl. [14]).

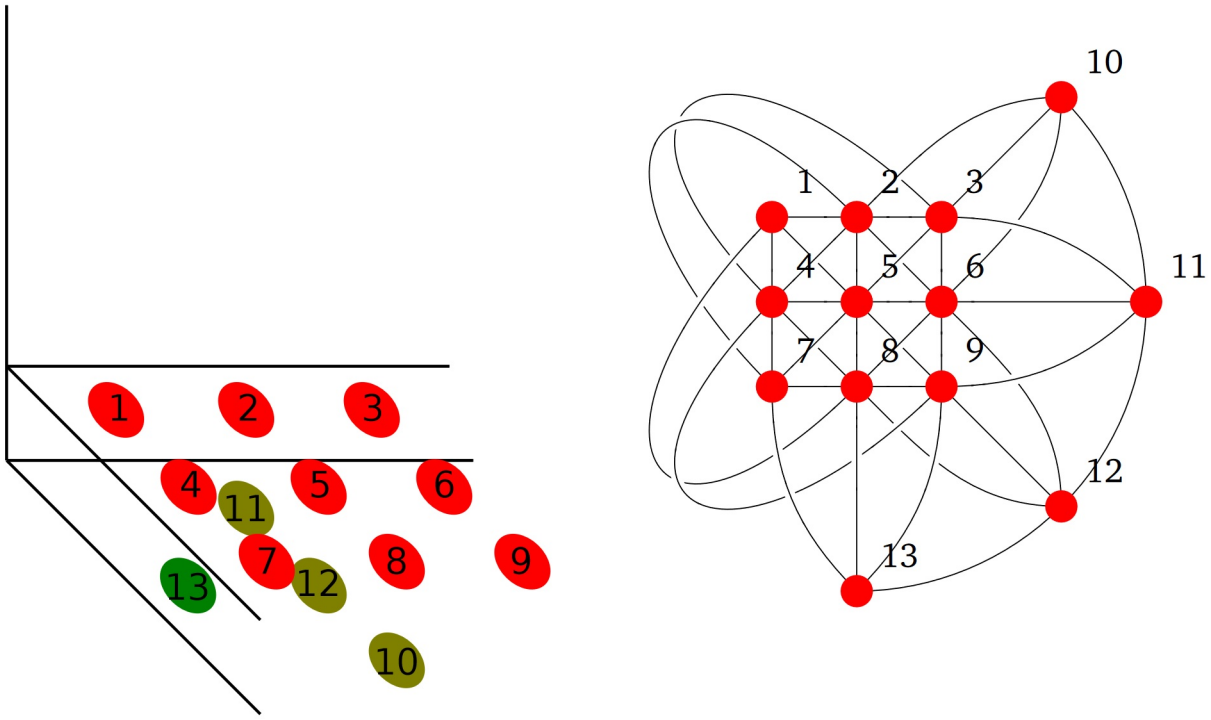


Abbildung 2: Links: Der projektive Raum $\mathcal{P}\mathbb{K}_3^2$ eingebettet im $\mathbb{K}_3^3$-Vektorraum. Rechts: Die gleiche projektive Geometrie repräsentiert durch Punkte und Linien. Quelle: [14]

Da die affine Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ durch die regulären Punkte festgelegt wird, ist noch folgendes Theorem erwähnenswert.

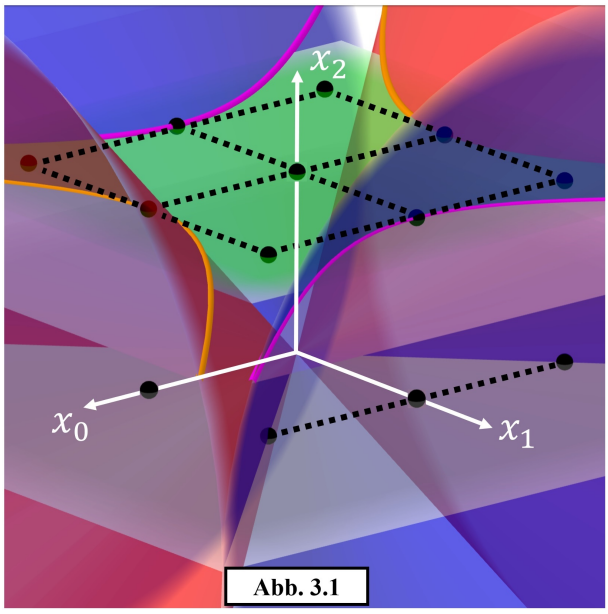
Theorem 2.2 (Affine Koordinaten [16])**.** Die Funktion:

$$k : \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \to \mathcal{U}\mathbb{K}_p^d : \hat{x} = [x_0, \dots, x_{d-1}, x_d = 1]^T \mapsto (x_0, \dots, x_{d-1})^T \text{ ist eine Bijektion.}$$

Elemente aus $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ werden als $\vec{x}$ notiert, sodass $\hat{x} = [\vec{x}, 1]^T$ geschrieben werden kann.

2.3. Projektive Quadrik

In dieser Arbeit wird über dem endlichen Körper $\mathbb{K}_p$ gearbeitet und da dieser zyklisch ist, lässt er sich nicht anordnen. Somit ist auch kein Abstandsbegriff im herkömmlichen Sinne möglich, da keine Metrik induzierbar ist. Dieses Problem wird behoben, indem lokal der Abstand eines Punktes zu seinen Nachbarn definiert wird. Dabei legt man eine Linie durch den ausgewählten Punkt und fasst den Schnitt der Linie mit der Quadrik als Einheitsabstand auf. Die Quadrik ist dabei der Kern, also die Nullstellenmenge einer quadratischen Form. Diese Idee stammt von Mecke und soll zunächst geometrisch veranschaulicht werden, bevor sie mathematisch präzisiert wird. Dazu betrachte man die Abbildung 3.1. In dieser sind zwei Quadriken abgebildet. Die rote unterliegt der Gleichung $0 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ und die blaue der Gleichung $0 = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$. Beide Quadriken sind kontinuierlich dargestellt und mit $\mathbb{K}_p$ als zugrundeliegenden Körper dürfte man nur die diskreten Punkte plotten, die die Gleichungen erfüllen, weswegen die Abbildung nur illustrativen Zwecken dienen soll. Mit ihr wird ersichtlich, dass eine Quadrik mit der Minkowski-Signatur $(-, +, \dots, +)$ nur Einheitsabstände entlang einer Vorwärts- und Rückwärtsrichtung festlegt. Um auch in der zweiten Dimension der affinen Ebene entsprechend Einheitsabstände festzulegen, braucht es die zweite, die blaue Quadrik. Es ist also eine Biquadrik als Analogen zum Metrischentensor der ART nötig, um Einheitslängen um einen ausgewählten Punkt zu definieren.



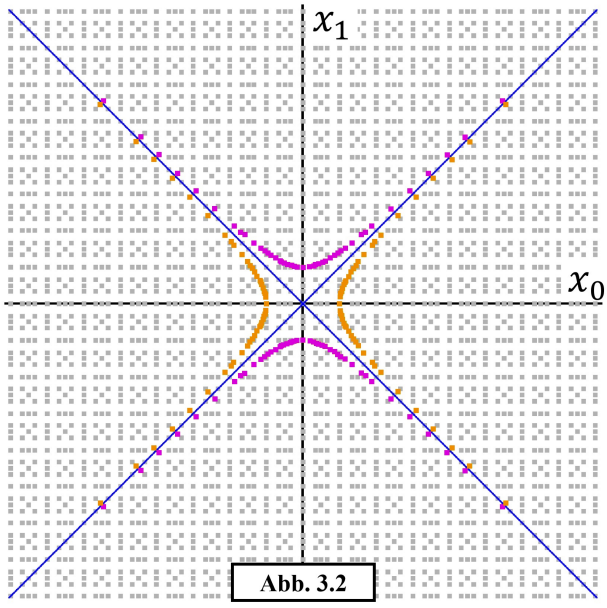


Abbildung 3: Abb. 3.1: Der rote Kegel stellt die Lösungsmenge der Gleichung $0 = -x_0^2+x_1^2+x_2^2$ (I) über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen dar und der blaue Kegel stellt entsprechend die Lösungsmenge der Gleichung $0 = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ (II) dar. Weiter ist mit schwarzen Punkten der $\mathcal{P}\mathbb{K}_3^2$ dargestellt. Der Schnitt der Lösungsmenge der Gleichungen (I) & (II) (rote und blaue Kegel) mit der Ebene, also dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_3^2$ legt Einheitslängen bzgl. dem Center (schwarzer Punkt auf der x_2-Achse) fest und ist mit Hyperbelpaaren, in orange und violett angedeutet. Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra. Abb. 3.2: Simulation der Biquadrik mit Minkowski-Signatur (Gleichungen (I) & (II)) mit Hilfe einer $\mathbb{Z}$-Näherung für $p = 11251$ (vgl. Quelle: [17]).

Um eine solche Biquadrik zu konstruieren, sind die nachfolgenden Definitionen nötig. Diese Definitionen übertragen in gewisser Weise das Skalarprodukt über den reellen Zahlen auf beliebige Körper (vgl. [18]). Diese Definitionen lassen sich auch allgemeiner formulieren, jedoch werden sie hier auf die bisher eingeführten mathematischen Strukturen spezifiziert.

Sei $char(\mathbb{K}_p) \neq 2$ und es werde die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Definition 2.15 (Symmetrische Bilinearform [18])**.** Eine symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{K}_p^{d+1}$ über dem Körper $\mathbb{K}_p$ ist eine Abbildung:

$$b : \mathbb{K}_p^{d+1} \times \mathbb{K}_p^{d+1} \longrightarrow \mathbb{K}_p, \text{ mit den Eigenschaften } (\forall\, \underline{x}_i,\, \underline{y}_i \in \mathbb{K}_p^{d+1})(\forall\, \lambda_i \in \mathbb{K}_p):$$

$$b(\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2\,,\, \underline{y}_1) = \lambda_1 b(\underline{x}_1\,,\, \underline{y}_1) + \lambda_2 b(\underline{x}_2\,,\, \underline{y}_1),$$

$$b(\underline{x}_1\,,\, \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2) = \lambda_1 b(\underline{x}_1\,,\, \underline{y}_1) + \lambda_2 b(\underline{x}_1\,,\, \underline{y}_2) \text{ und}$$

$$b(\underline{x}_1\,,\, \underline{y}_1) = b(\underline{y}_1\,,\, \underline{x}_1).$$

Korollar 2.4 (Symmetrische Darstellungsmatrix [18])**.**
Sei $(x_i), (y_i) \in \mathbb{K}_p^{d+1}$ und $\{\underline{g}_i\}$ eine Basis von $\mathbb{K}_p^{d+1}$, dann ist:

$$b(x_i \underline{g}_i\,,\, y_j \underline{g}_j) = x_i Q_{ij} y_j.$$

Es existiert also eine bijektive Korrespondenz zwischen einer symmetrischen Bilinearform b und einer symmetrischen Matrix[7] $(Q_{ij}) \in M(n \times n\,,\, \mathbb{K}_p)$.

Definition 2.16 (Quadratische Form [18])**.** Sei b eine symmetrische Bilinearform und (Q_{ij}) die zugehörige symmetrische Darstellungsmatrix, so kann man ihr eine quadratische Form q auf $\mathbb{K}_p^{d+1}$ zuordnen:

$$q_b : \mathbb{K}_p^{d+1} \longrightarrow \mathbb{K}_p : \underline{x} \longmapsto b(\underline{x}\,,\, \underline{x}), \text{ mit:}$$

$$q_b(\lambda \underline{x}) = b(\lambda \underline{x}\,,\, \lambda \underline{x}) = \lambda^2 (Q_{ii} x_i^2 + 2 Q_{j,\, i<j} x_i x_j) = \lambda^2 q_b(\underline{x}).$$

Man betrachte ab hier quadratische Formen q für die gilt, dass $q(\underline{x}) = 0$ ist. Dann ist aber auch $q(\lambda \underline{x}) = 0$ $(\forall\, \lambda \in \mathbb{K}_p)$. Damit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.17 (Projektive Quadrik (vgl. [5] S. 159))**.** Eine projektive Quadrik ist die Menge:

$$Q := \left\{ \hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \,|\, q(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{Q} \hat{x} = 0 \right\}, \text{ mit der quadratischen Form}^8$$

$$q : \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \longrightarrow \mathbb{K}_p : \hat{x} \longmapsto q(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{Q} \hat{x} \text{ und der projektiven Darstellungsmatrix}^9$$

$$\hat{Q} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^{d \times d} := \mathbb{K}_p^{(d+1)\times(d+1)} / \sim \;\wedge\; \hat{Q} = \hat{Q}^T \;\wedge\; rang(\hat{Q}) = (d+1).$$

Die Symmetrie und den maximalen Rang der projektiven Darstellungsmatrix zu fordern stellt sicher, dass eine projektive Quadrik Q von genau einer Darstellungsmatrix $\hat{Q}$ bestimmt wird und somit nicht zwei verschiedene Matrizen $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^{d \times d}$ existieren, die auf die gleichen Quadriken $Q_1 = Q_2$ führen (*Beweis:* vgl. [19] S. 14 & 15). Somit kann man ab sofort die Begriffe Quadrik und projektive Darstellungsmatrix, durch die die Quadrik eindeutig bestimmt wird, als äquivalent ansehen und es wird je nach Kontext auf die ausführliche Bezeichnung verzichtet.

[7] Das Charakteristikum einer symmetrischen Matrix Q ist $Q = Q^T$, also das sie gleich ihrem transponierten ist. Mit $M(n \times n, \mathbb{K}_p)$ ist die Menge aller $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}_p$ gemeint.

[8] Die Definition 2.16 auf den finiten projektiven Raum anzuwenden ist zulässig, da mit Gleichung (2.3) ein Koordinatensystem für ihn gewählt wurde.

[9] Der Raum der projektiven Matrizen ist analog zu Gleichung (2.2) zu sehen.

Die Darstellungsmatrix $\hat{Q}$ hängt natürlich von der Wahl der Basis ab. Denn dazu bemerkt man zunächst, dass symmetrische Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ diagonalisierbar sind (vgl. [18]). Weiter lässt sich nach dem Trägheitssatz von Sylvester eine symmetrische Darstellungsmatrix einer symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^{d+1}$ durch Basiswechsel auf die diagonal Form $D_{r,s} = \operatorname{diag}(-\mathbb{1}_s, \mathbb{1}_r, 0 \cdot \mathbb{1}_{(d+1)-(r+s)})$ überführen (vgl. [20] S. 3). Weiter ist eine symmetrische Bilinearform nicht ausgeartet genau dann, wenn ihre symmetrische Darstellungsmatrix maximalen Rang hat (vgl. [20] S. 2) und genau dann, wenn ihr Rang maximal ist, ist 0 kein Eigenwert der Matrix (vgl. [21] S. 388). Somit ist die zugehörige symmetrische Darstellungsmatrix von vollem Rang durch Basiswechsel auf:

$$\begin{aligned} &D_{r,s} = \operatorname{diag}(\alpha \mathbb{1}_s, \mathbb{1}_r), \\ &\text{mit } \alpha = -1 \Leftarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ und } (d+1) = r + s \end{aligned} \tag{2.6}$$

überführbar. Die Signatur, also das Tupel (r, s) ist eine Invariante unter dem Basiswechsel, sofern der zugrundeliegende Körper der Reelle ist (vgl. [19] S. 33).

Das die Form in Gleichung (2.6) auch über finiten Körpern i.d.T. erreichbar ist, ließt man auf den Seiten 33 bis 37 in [19] nach. Weiter stellt man fest, dass in finiten Körpern $(\forall\, \alpha \in \mathbb{K}_q)(\exists\, x, y \in \mathbb{K}_q) \quad x^2 + y^2 = \alpha^{-1}$ gilt (vgl. Satz 3.8 in [19]). D.h. mittels einer Transformationsmatrix der Größe 2×2 lassen sich je zwei Nichtquadratzahlen α in Einsen transformieren (vgl. Gleichung 3.45 in [19]). Somit ergibt sich folgendes Theorem, wenn man mehrere solche 2×2-Matrizen zu einer Transformationsmatrix entsprechender Größe zusammenfasst.

Theorem 2.3 (Darstellungsmatrizen im finiten projektiven Raum (vgl. [19] S. 39))**.**
Sei $\hat{Q} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^{d \times d}$ eine projektive Darstellungsmatrix. Dann lässt sich $\hat{Q}$ durch geeignete Wahl einer Basis auf die Form:

$$\begin{aligned} (\,\hat{Q} = \mathbb{1}_{d+1} \;\dot{\vee}\; \hat{Q} = [\operatorname{diag}(\alpha, \mathbb{1}_d)]\,) &\Longleftrightarrow d : \textit{ungerade} \;\dot{\vee} \\ \dot{\vee}\; \hat{Q} = [\mathbb{1}_{d+1}] &\Longleftrightarrow d : \textit{gerade} \end{aligned}$$

bringen. Der Fall $d : \textit{ungerade}$ ergibt sich, da die Untertransformationsmatrizen eine gerade Größe (2×2) haben und es dann auf die Kombination von r und s ankommt, also ob s in Gleichung (2.6) gerade oder ungerade ist. Denn wenn s gerade ist, lassen sich alle α auf der Diagonalen auf eine Eins überführen ansonsten bleibt ein α übrig. Im Fall $d : \textit{gerade}$ nehme man zunächst $s : \textit{gerade}$ an, dann folgt automatisch, dass $\hat{Q} = [\mathbb{1}_{d+1}]$ ist. Falls nun $s : \textit{ungerade}$ ist, dann ist $r : \textit{gerade}$, weil $(d+1) : \textit{ungerade}$ ist, da $d : \textit{gerade}$ ist. Nun invertiere man die Untertransformationsmatrizen und konstruiere damit eine entsprechend große Transformationsmatrix mit der man $[\operatorname{diag}(\alpha \mathbb{1}_s, \mathbb{1}_r)]$ in $[\operatorname{diag}(\alpha \mathbb{1}_s, \alpha \mathbb{1}_r)] = \alpha[\mathbb{1}_{d+1}]$ überführt. Weiter nutzt man Gleichung (2.1) aus und erhält $\alpha[\mathbb{1}_{d+1}] = [\mathbb{1}_{d+1}]$.

Wie zu Beginn dieses Unterabschnitts geometrisch erläutert, ist eine Biquadrik sinnvoll.

Definition 2.18 ((Projektive) Biquadrik [6] & [17])**.**
Eine (projektive) Biquadrik zu einem Center $\hat{c}_i \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ ist die Menge:

$$Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_i} := \left\{ \hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \,|\, \hat{x}^T \hat{Q}^+\big|_{\hat{c}_i} \hat{x} = 0 \;\dot{\vee}\; \hat{x}^T \hat{Q}^-\big|_{\hat{c}_i} \hat{x} = 0 \right\}, \text{ sodass}$$

$$l(\hat{x}) := \hat{c}_i \wedge \hat{x} \quad (\forall\, \hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d) \quad |l(\hat{x}) \cap \hat{Q}^+\big|_{\hat{c}_i}| + |l(\hat{x}) \cap \hat{Q}^-\big|_{\hat{c}_i}| = 2, \text{ wobei } \hat{c}_i \notin Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_i} \text{ ist.}$$

D.h. das eine jede Linie durch das Center der Biquadrik die Biquadrik genau zwei Mal schneidet. Damit wird sichergestellt, dass entlang einer beliebig orientierten Linie durch das

Center, zwei Einheitslängen lokal in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung bzgl. des Centers definiert werden. Man vergleiche dazu Abbildung 4 in der dieser Sachverhalt veranschaulicht wird und ebenso in der illustrativen Abbildung 3. Allerdings wird in Abbildung 3 auch ersichtlich, dass es zwei Linien durch das Center gibt, die die Quadriken tangieren. Dies ist eine Besonderheit der Minkowski-Signatur einer Biquadrik auf welche in Abschnitt 4 eingegangen wird.

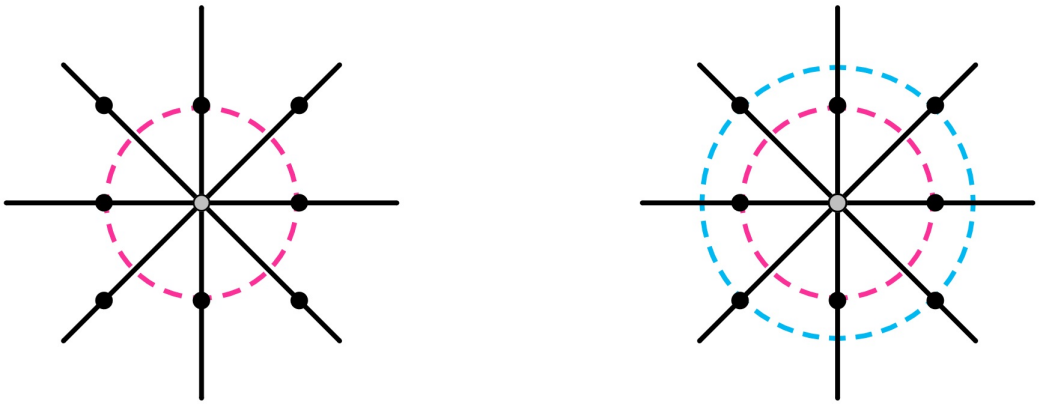


Abbildung 4: Links: Die affine Ebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_3^2$ und eine Quadrik in rot. Rechts die gleiche Ebene mit einer Biquadrik in rot und blau, sodass jede Linie durch das Center zwei Schnitte mit der Biquadrik besitzt. Die Quadriken sind gestrichelt angedeutet, da sie selbst nur aus diskreten Punkten über einem endlichen Körper $\mathbb{K}_3$ bestehen. Quelle: [6]

Mit Definition 2.18 und mit Theorem 2.3 lässt sich die Biquadrik im Standardcenter $\hat{c} = [\,\vec{0}, 1\,]^T$ angeben zu:

$$\hat{Q}_0^{\pm} := \hat{Q}^{\pm}\big|_{\hat{c}} = \begin{bmatrix} \eta_d & \vec{0}_d \\ \vec{0}_d^T & \pm g_{\pm}^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^{d\times d}, \text{ wobei} \tag{2.7}$$
$$\eta_d := \operatorname{diag}(-1_0, 1_1, \dots, 1_{d-1}) \text{ ist.}$$

In Gleichung (2.7) η_d zu wählen lässt sich wie folgt rechtfertigen. Falls $d : \textit{gerade}$, dann sind alle Quadriken auf Einheitsmatrizen überführbar und somit ist dann η_d eine spezielle Konvention. Falls $d : \textit{ungerade}$, dann landet man entweder wieder im Fall der speziellen Konvention, oder man erhält den Fall in dem ein α gleich -1 bleibt. Dabei darf -1 keine Quadratzahl sein, damit das Transformieren der α, wie zu Theorem 2.3 erläutert, funktioniert. Des weiteren wird in Abschnitt 4 aufgezeigt, dass η_d eine natürliche Wahl ist, wenn man eine flache Raumzeit im finiten Projektiven modellieren möchte. Weiter sind $\pm g_{\pm}^2$ Skalierungsfaktoren, die die Quadriken in Abbildung 3 aufblähen oder sich zusammenziehen lassen würde. Dabei kann man g_+^2 stets auf 1 normieren und deshalb definiert man den räumlichen Skalierungsfaktor $g := g_-^2/g_+^2$, der sich dann mit $g_+^2 = 1$ als $g = g_-^2$ ausdrücken lässt (vgl. [14]). Dabei muss aber $-g_-^2$ eine Nichtquadratzahl sein. Dies ist gewährleistet, wenn nur finite Körper $\mathbb{K}_p$ betrachtetet werden, bei denen $p \equiv 3 \bmod 4$ ist, damit -1 keine Quadratzahl ist. Denn dann ist auch das Produkt $-g_-^2$ eine Nichtquadratzahl, denn das Produkt aus einer Quadratzahl und einer Nichtquadratzahl ist in jedem Körper stets eine Nichtquadratzahl (vgl. [19] S. 36). Mit der Wahl $g_+^2 = 1$ normiert man also die Zeiteinheit auf eins und behält sich mit $g = g_-^2/g_+^2 = g_-^2$ die Freiheit, die Zeiteinheit und Längeneinheit entsprechend in Bezug zu einander zu setzten. Dies wird ersichtlicher, mit dem Lesen des nächsten Absatzes und der zu ihm gehörigen Rechnung A.1 im Anhang.

Mit Abbildung 3 und dem $\pm$ im $(d+1, d+1)$-ten-Eintrag der Matrix in Gleichung (2.7), also dem "Bi" in Biquadrik kann man formulieren, dass das $\pm$ der ausschlaggebende Punkt ist, warum zwei Eichhyperbelpaare in Abbildung 3 auf der affinen Ebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d|_{p=3}^{d=2}$ entstehen. Anschließend könnte man behaupten, wenn man nun eine Dimension höher geht, dass eine Triquadrik nötig wäre, um ein drittes Eichhyperbelpaar im $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^3$ zu erhalten. Jedoch ist Abbildung 3 ein Spezialfall, indem sich das $\pm$ in der Biquadrik nur als ein Drehen der einen Quadrik um die x_2-Achse äußert. Denn in höhereren Dimensionen zeigt sich, dass eine Quadrik der Biquadrik entlang einer Linie lokal Längen festlegt und die andere Quadrik für die restlichen Linien zuständig ist, die erforderlich sind um auf eine entsprechende Anzahl von Linien zu kommen, die einen entsprechend dimensionalen Raum "aufspannen" (vgl. dazu Rechnung A.1 im Anhang).

Bislang wurde die Biquadrik lokal für einen Punkt im finiten projektiven Raum konstruiert. Der nächste Schritt ist, jeden Punkt des Raums mit einer Biquadrik auszustatten.

Definition 2.19 (Biquadrik-Feld)**.**
Sei $Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_i}$ eine Biquadrik zu ihrem Center $\hat{c}_i \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$, dann ist ein Biquadrik-Feld die Menge:

$$Q_F = \left\{ Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_i} \mid (\forall\, \hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d) \quad \hat{c}_2 \in Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_1} \Longleftrightarrow \hat{c}_1 \in Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_2} \right\}.$$

Die Bedingung welcher die Biquadriken - die das Feld bilden - unterworfen werden, wird symmetrische Nachbarschaftsrelation genannt. Sie besagt, dass für alle Punkte des finiten projektiven Raumes Folgendes gelten soll: Wenn $\hat{c}_2 \in Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_1}$ sein soll, dann wird zwischen dem Center $\hat{c}_1$ und seinem Nachbarn $\hat{c}_2$ eine Einheitslänge festgelegt und wenn weiter $\hat{c}_1 \in Q^{\pm}\big|_{\hat{c}_2}$ sein soll, dann wird die gleiche Einheitslänge vom anderen Center $\hat{c}_2$ aus zu dessen Nachbarn $\hat{c}_1$ festgelegt. Sie sorgt also dafür, dass Biquadriken zu einzelnen Punkten zu einem Feld gekoppelt werden. Setzt man nun die Quadrik $\hat{Q}_0^{\pm}$ im Standardcenter $\hat{c} = [\,\vec{0}, 1]^T$ an, welche Einheitslängen symmetrisch entlang einer Linie bzgl. ihrem Center festlegt (vgl. Rechnung A.1 im Anhang) und benutzt von dort aus entlang jeder nötigen Linie - um einen Raum entsprechender Dimension "aufzuspannen"- sukzessive die symmetrische Nachbarschaftsrelation, so wird ein Inertialsystem mit Minkowski-Signatur entstehen. Weiter stellt man sich die Frage, wie dann die ART im finiten projektiven konstruiert werden soll, denn dann dürfte eine Quadrik die Abstände in jeweiliger Vorwärts- und Rückwärtsrichtung auf keinen Fall symmetrisch bzgl. dem jeweilig betrachteten Raumpunkt festlegen. Mit Abschnitt 3 wird ersichtlich, wie das vermeintliche Problem gelöst wird.

Bislang wurde die Biquadrik im Standardcenter $\hat{c} = [\,\vec{0}, 1\,]^T$ in Gleichung (2.7) definiert und darüber hinaus wurden alle Punkte des Raumes mit einer Biquadrik ausgestattet. Somit stellt sich nun die Frage, wie erhält man die Quadrik im jeweiligen Punkt.

2.4. Projektivitäten

Um nun von $\hat{Q}_0^{\pm}$ auf Quadriken in einem anderen Punkt zu schließen, ist eine entsprechende Abbildung nötig, die im allgemeinsten Fall die Punktabhängigkeit von $\hat{Q}^{\pm}$ liefert. Umgekehrt muss man auch aus der Quadrik in einem Punkt des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wieder auf die des Standardcenters zurück schließen können. Sonst wäre ein bestimmter Punkt ausgezeichnet und man könnte nicht in irgendeinem Punkt diesen als Standardcenter erklären und dort sein lokales Inertialsystem ausrufen. D.h. es ist eine Abbildung nötig, die bijektiv auf dem $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ operiert.

Definition 2.20 (Projektivität [19])**.** Eine Projektivität ist eine bijektive Abbildung:

$$\pi : \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d \longrightarrow \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d,$$

welche physikalisch relevante Konstruktionen kovariant lässt und sich als reguläre Matrix[10]

$$\begin{aligned}\hat{P} \in \mathcal{P}GL(d, \mathbb{K}_p) &:= GL(d+1, \mathbb{K}_p)/I(d+1, \mathbb{K}_p) = \\ &= \left\{\hat{P} \in GL(d+1, \mathbb{K}_p) \,|\, \hat{P} \equiv \lambda \hat{P}\right\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

(vgl. [22]) in der Abbildungsvorschrift

$$\hat{x} \longmapsto \pi(\hat{x}) = \hat{P}\hat{x}$$

äußert. Damit kann nun das Transformationsverhalten eines Punktes definiert werden.

Definition 2.21 (Transformationsverhalten eines Punktes und der Biquadrik [6])**.** Sei $\hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ dann transformiert er sich unter einer Projektivität $\hat{P} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^{d\times d}$ zu:

$$\hat{x}' := \hat{P}\hat{x}. \tag{2.9}$$

Damit folgt das Transformationsverhalten einer Quadrik, wenn man zunächst eine Quadrik zu einem beliebigen Center betrachtet:

$$0 = \hat{x}^T \hat{Q}^{\pm} \hat{x},$$

anschließend zu einem beliebigen anderen Center:

$$\begin{aligned}0 &= \hat{x}'^T \hat{Q}^{\pm\prime} \hat{x}' = \\ &= (\hat{P}\hat{x})^T \hat{Q}^{\pm\prime} (\hat{P}\hat{x}) = \\ &= \hat{x}^T \hat{P}^T \hat{Q}^{\pm\prime} \hat{P}\hat{x}\end{aligned}$$

und diese miteinander vergleicht:

$$\hat{Q}^{\pm\prime} = \hat{P}^{-T} \hat{Q}^{\pm} \hat{P}^{-1}. \tag{2.10}$$

Dabei wurde mit dem Vergleich gefordert, dass sich die Quadrik in Analogie zum Transformationsverhalten von Tensoren aus der ART zu transformieren hat ($\hat{x}^T \hat{Q}^{\pm} \hat{x} \stackrel{!}{=} \hat{x}'^T \hat{Q}^{\pm\prime} \hat{x}'$).

Falls die Physik, die im finiten projektiven Raum modelliert werden soll, es erfordert, dass sich aus der Quadrik $\hat{Q}_0^{\pm}$ eine punktabhängige Quadrik $\hat{Q}^{\pm}(\hat{x})$ ergibt, so wird diese Abhängigkeit durch eine entsprechende Projektivität $\hat{P}(\hat{x})$ eingebaut, sodass sich:

$$\hat{Q}^{\pm}(\hat{x}) = \hat{P}^{-T}(\hat{x}) \hat{Q}_0^{\pm} \hat{P}^{-}(\hat{x})$$

ergibt. Da in dieser Arbeit nicht die ART behandelt wird, kann man sich auf Projektivitäten

[10] Vgl. [19] & [22] zu: Dabei ist $\mathcal{P}GL(d, \mathbb{K}_p)$ die Gruppe der Automorphismen und wird als projektive allgemeine lineare Gruppe über dem endlichen Körper $\mathbb{K}_p$ bezeichnet, wobei $GL(d+1, \mathbb{K}_p)$ die allgemeine lineare Gruppe ist und $I(d+1, \mathbb{K}_p) = \{\lambda \hat{I}_{d+1} \,|\, \lambda \in \mathbb{K}_p\}$. Projektivitäten aus $\mathcal{P}GL(d, \mathbb{K}_p)$ sind mit Invarianzen verbunden, weshalb man die Gruppe auch als Symmetriegruppe des projektiven Raums bezeichnet. Sie hat $(d+1)^2 - 1$ Generatoren. Mit Generator ist dabei eine Transformation gemeint, die auf eine Erhaltungsgröße führt.

beschränken, die aus der Untergruppe[11]:

$$\mathcal{P}O(d,\mathbb{K}_p) := \left\{\hat{O} \in \mathcal{P}GL(d,\mathbb{K}_p) \,|\, \hat{O}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{O} = \hat{Q}_0^{\pm}\right\} \tag{2.11}$$

der projektiven allgemeinen linearen Gruppe zu entnehmen sind (vgl. [22]). Diese lassen dabei die Quadrik mit der Minkowski-Signatur invariant, was für das Relativitätsprinzip erforderlich ist. Soll außerdem auch das Center einer Quadrik invariant bleiben, so gelangt man zu einer Untergruppe[12] mit weiter eingeschränkten Symmetrien:

$$L(d,\mathbb{K}_p) := \left\{\hat{\Lambda} \in \mathcal{P}O(d,\mathbb{K}_p) \,|\, \hat{\Lambda}\hat{c}_i = \hat{c}_i\right\}, \tag{2.12}$$

welche für das Prinzip der speziellen Relativitätstheorie (SRT) entsprechende Kovarianz liefert (vgl. [22]). Denn würden Projektivitäten der $L(d,\mathbb{K}_p)$ das jeweilige Center nicht invariant lassen, so würden die Abstände in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung bzgl. dem betrachteten Center nicht symmetrisch festgelegt werden, was sich in Abschnitt 3 als eine Beschleunigung herausstellen wird. Die $L(d,\mathbb{K}_p)$ operiert dabei nur auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$, denn ihre Projektivitäten nehmen im kanonischen Koordinatensystem, welches in Gleichung (2.3) für diese Arbeit gewählt wurde, die Form:

$$\hat{\Lambda} = [\mathrm{diag}(\Lambda_d, 1)], \text{ mit } \Lambda_d \eta_d \Lambda_d = \eta_d \tag{2.13}$$

an (vgl. [22]). Eine weitere Gruppe, deren Elemente nur auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ als Translationen operieren, ist die:

$$T(d,\mathbb{K}_p) := \left\{\hat{T} \in \mathcal{P}GL(d,\mathbb{K}_p) \,|\, \hat{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \vec{s}_d\big|_{s_d=1} \\ \vec{0}_d^T & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} s_d\mathbb{1}_d & s_d\vec{s}_d\big|_{s_d=1} \\ \vec{0}_d^T & s_d \end{bmatrix}\right\}, \tag{2.14}$$

welche die fundamentale Symmetriegruppe der flachen Raumzeit ist (vgl. [22]) . Kombiniert man nun die Lorentz-Gruppe $L(d,\mathbb{K}_p)$ und die Translationsgruppe $T(d,\mathbb{K}_p)$ mit Hilfe des semidirekten Produktes, so erhält man die Poincaré-Gruppe[13]:

$$\begin{aligned} P(d,\mathbb{K}_p) :=& T(d,\mathbb{K}_p) \rtimes L(d,\mathbb{K}_p) = \\ =& \left\{\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \Lambda_d & \vec{s}_d \\ \vec{0}_d^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}GL(d,\mathbb{K}_p) \,|\, \Lambda_d \in L(d,\mathbb{K}_p)\right\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

welche eine Untergruppe der allgemeinen affinen Gruppe:

$$\begin{aligned} A(d,\mathbb{K}_p) :=& \mathcal{U}\mathbb{K}_p^d \rtimes GL(d,\mathbb{K}_p) = \\ =& \left\{\hat{A} = \begin{bmatrix} G_d & \vec{s}_d \\ \vec{0}_d^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}GL(d,\mathbb{K}_p) \,|\, G_d \in GL(d,\mathbb{K}_p)\right\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

ist (vgl. [22]). Diese operiert dabei als Automorphismus auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$. Nachdem nun bekannt ist, wie man von einer Quadrik zu einem Center auf die Quadrik zu einem anderen Center schließen kann, sollen die Newtonsche Gesetze in der Sprache der finiten projektiven Geometrie formuliert werden.

[11] Die $\mathcal{P}O(d,\mathbb{K}_p)$ ist die projektive Orthogonale Gruppe und besitzt $d(d+1)/2$ Generatoren (vgl. [22]).
[12] Die $L(d,\mathbb{K}_p)$ wird als Lorentz-Gruppe bezeichnet und besitzt $d(d-1)/2$ Generatoren (vgl. [22]).
[13] Die (projektive) Poincaré-Gruppe hat $d(d+1)/2$ Generatoren (vgl. [22]).

3. Newtonsche Gesetze im finiten projektiven Raum

Dazu muss zunächst die projektive Trajektorie eines punktartigen Teilchens definiert werden. Doch zuvor muss man das bisherige mathematische Konstrukt in Bezug zur Physik setzten. Dazu betrachte man zunächst die ersten drei Axiome des finiten Weltmodells von Mecke (vgl. [23]):

(FW1) Es existieren eine endliche Anzahl von Ereignissen $\hat{x}$.

(FW2) Zwei Ereignisse sind durch genau eine Sequenz l verbunden.

(FW3) Zwei Sequenzen haben ihren Ursprung in einem gemeinsamen Ereignis.

Denn mit diesen kann man eine projektive Geometrie $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eingebettet in einem Vektorraum koordinatisieren (vgl. Definition 2.14 ff. & insbesondere Abbildung 2). Weiter hat man den fundamentalen Objekten - Punkte $x \in \mathcal{X}$ und Linien $l \in \mathcal{L}$ aus Definition 2.8 bzw. den koordinatisierten Versionen Punkte $\hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ und Linien $l = \left\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ... \,|\, \hat{x}_i \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d\right\}$ aus Korollar 2.3 - des finiten projektiven Raums eine noch abstrakte physikalische Bedeutung zugeschrieben, die im Kontext spezifiziert werden muss. Weiter betrachtet man die nächsten beiden Axiome:

(FW4) Jedes Ereignis hat genau einen Vorgänger und einen Nachfolger.

(FW5) Ein Ereignis ist der Nachbar seines Nachbarn.

Das vierte Axiom liefert die Biquadrik aus Definition 2.18 und das fünfte ist in der Nachbarschaftsrelation des Biquadrik-Feldes in Definition 2.19 codiert. Abschließend betrachtet man das letzte Axiom:

(FW6) Die realisierten Ereignisse sind nur eine Teilmenge aller möglichen des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$.

Dieses ist für eine Quantisierung von größerer Bedeutung.

Im Sinne dieser Axiome wird nun die projektive Trajektorie definiert.

Definition 3.1 (Projektive Trajektorie (vgl. [17])).
Die projektive Trajektorie eines punktartigen Teilchens M ist die Menge:

$$l_M := \{\hat{x}(\tau) =: \hat{x}_\tau \,|\, (\forall\, \tau \in \mathbb{K}_p) \;\; \hat{x}_{\tau\pm1} : \text{Nachbar}(\hat{x}_\tau)\} \subseteq \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d, \tag{3.1}$$

also die Sequenz aller Ereignisse $\hat{x}_\tau$, die aus einem Sprungprozess mit dem Verlauf des Parameters τ entstehen. Dabei ist der Sprungprozess der Nachbarschaftsrelation im Sinne, wie sie in Definition 2.19 auftritt, unterworfen. Denn die Ereignisse $\hat{x}_{\tau\pm1}$ vor oder nach dem Ereignis $\hat{x}_\tau$ zum jeweiligen Parameterwert τ sollen Nachbarn von $\hat{x}_\tau$ sein. Im Kontext der Mechanik liegt es nahe ein Ereignis als Punkt der Raumzeit und die Sequenz der Raumzeitpunkte, die sich mit Voranschreiten des Parameters bildet, als die Trajektorie des punktartigen Teilchens zu interpretieren. Weiter wurde an dieser Stelle noch nicht festgelegt, welche Form die Trajektorie hat, also ob sie geradlinig oder sonstiges ist. Somit werden sich die realisierten Ereignisse noch als eine Teilmenge herausstellen durch Spezifizierung der Prinzipien, derer sie unterliegen sollen.

Man analysiert nun den Sprungprozess, der die Trajektorie bestimmt. Dazu betrachte man die Quadrik $\hat{Q}^{\pm}\big|_{\hat{x}_\tau}$ im Punkt $\hat{x}_\tau$ zu einem beliebigen τ. Dann sollen Vorgänger und Nachfolger $\hat{x}_{\tau\pm1}$ Nachbarn von $\hat{x}_\tau$ sein, d.h.:

$$0 = \hat{x}_{\tau\pm1}^T \hat{Q}^{\pm}\big|_{\hat{x}_\tau} \hat{x}_{\tau\pm1}\,. \tag{3.2}$$

Weiter wählt man eine Projektivität $\hat{T} \in T(d, \mathbb{K}_p)$, da eine flache Raumzeit betrachtet werden soll, dann ist:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{s} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} =: \hat{T}_{\pm\hat{s}} \tag{3.3}$$

ein Translationsoperator im Sinne von Satz B.1 aus dem Anhang B. Damit erhält man für die Punkte:

$$\hat{x}_{\tau\pm1} = \hat{x}_\tau \oplus \hat{s} := \hat{T}_{\pm\hat{s}}\hat{x}_\tau = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{s} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_\tau \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}_\tau \pm \vec{s} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}_{\tau\pm1} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Die Punkte $\hat{x}_{\tau\pm1}$ sind nach Gleichung (3.4) aus $\hat{x}_\tau$ durch Translation auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ um $\pm\vec{s}$ hervorgegangen. Mit anderen Worten, man hat die Punkte $\hat{x}_\tau$ und $\hat{x}_{\tau\pm1}$ auf eine gerade Linie $l_\tau = \{\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}_\tau, \hat{x}_{\tau+1} \,|\, \hat{x}_{\tau\pm1} = \hat{T}_{\pm\hat{s}}\hat{x}_\tau\}$ gelegt. Denn die Translationen von $\hat{x}_\tau$ nach $\hat{x}_{\tau\pm1}$ unterscheiden sich nur im Vorzeichen von $\vec{s}$. Betrachtet man nun Abbildung 5,

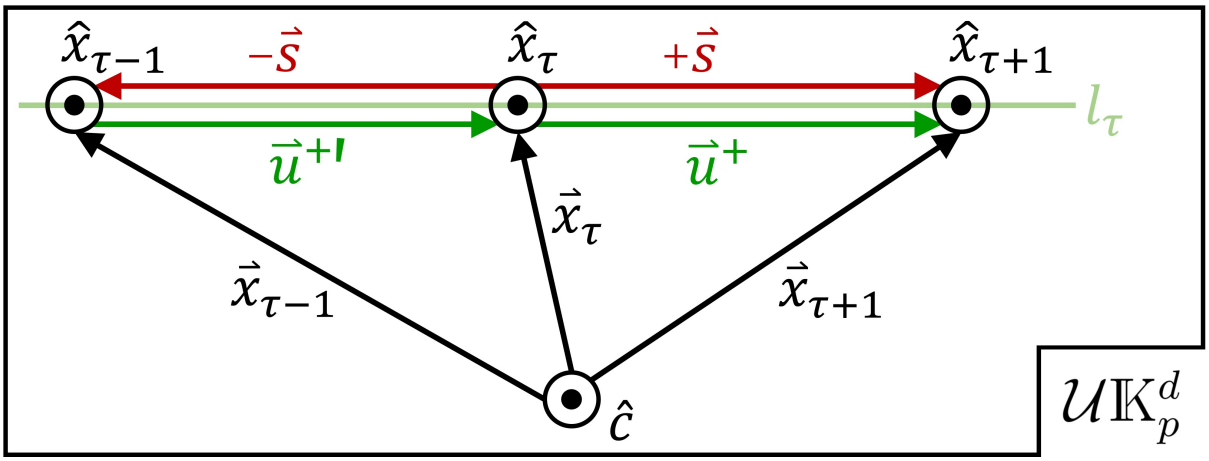


Abbildung 5: Illustration zu den Gleichungen (3.3) & (3.4). Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint.

mit der es nahe liegt, analog zur kontinuierlichen Mechanik, den Differenzenvektor $\pm\vec{s}$ aus $\oplus\hat{s} = [\pm\vec{s}, 1]^T$ als Geschwindigkeit $\pm\vec{u}$ zu interpretieren. Damit kann man die projektive Geschwindigkeit zu einem τ in positiver Richtung definieren zu:

$$\hat{u}^+ := \hat{x}_{\tau+1} \ominus \hat{x}_\tau \equiv \oplus\hat{s}.$$

Weiter betrachtet man:

$$\hat{u}^{+\prime} = \hat{x}_\tau \ominus \hat{x}_{\tau-1} = \ominus(\hat{x}_{\tau-1} \ominus \hat{x}_\tau)$$

und definiert damit die projektive Geschwindigkeit zu einem τ in negativer Richtung zu:

$$\hat{u}^- := \ominus\hat{u}^{+\prime} = \hat{x}_{\tau-1} \ominus \hat{x}_\tau \equiv \ominus\hat{s}.$$

Somit lässt sich nun kompakt formulieren:

Definition 3.2 (Projektive Geschwindigkeit (vgl. [24]))**.** Sei $\hat{x}_{\tau\pm1} = \hat{x}_\tau \oplus \hat{s}$ aus $\hat{x}_\tau$ durch Translation $\hat{T}_{\pm\hat{s}}$ hervorgegangen, dann ist die projektive Geschwindigkeit:

$$\hat{u}^\pm := \hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}_\tau = \oplus\hat{s}.$$

Formt man nun die Definition der projektiven Geschwindigkeit weiter um, um anschließend den Sprungprozess weiter zu analysieren, also das $\hat{u}^\pm \oplus \hat{x}_\tau = \hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}_\tau \oplus \hat{x}_\tau = \hat{x}_{\tau\pm1} \oplus \hat{c} = \hat{x}_{\tau\pm1}$ ist, wobei Satz B.2 und B.3 aus dem Anhang B verwendet wurde, so erhält man damit und mit Gleichung (3.2):

$$0 = (\hat{T}_{\hat{x}_\tau}\hat{u}^\pm)^T \hat{Q}^\pm\big|_{\hat{x}_\tau} (\hat{T}_{\hat{x}_\tau}\hat{u}^\pm).$$

Weiter verwendet man das Transformationsverhalten von Quadriken aus Gleichung (2.10), also dass $\hat{Q}^\pm\big|_{\hat{x}_\tau} = \hat{T}^T_{-\hat{x}_\tau}\hat{Q}^\pm_0\hat{T}_{-\hat{x}_\tau}$, wobei $\hat{T}^{-1}_{\hat{a}} = \hat{T}_{-\hat{a}}$ verwendet wurde (vgl. Satz B.4 aus dem Anhang B), so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{u}^{\pm T}\hat{T}^T_{\hat{x}_\tau}\hat{T}^T_{-\hat{x}_\tau}\hat{Q}^\pm_0\hat{T}_{-\hat{x}_\tau}\hat{T}_{\hat{x}_\tau}\hat{u}^\pm = \\ &= \hat{u}^{\pm T}\hat{Q}^\pm_0\hat{u}^\pm \end{aligned} \tag{3.5}$$

und damit:

Definition 3.3 (Kinematischer Constraint (vgl. [24]))**.**
Als kinematischen Constraint bezeichnet man die zueinander äquivalente Bedingungen:

$$0 = \hat{u}^{\pm T}\hat{Q}^\pm_0\hat{u}^\pm \iff \hat{u}^\pm \in Q^\pm_0.$$

Dabei ist der kinematische Constraint nichts anderes als das erste Newtonsche Axiom, ausgedrückt in der finiten projektiven Sprache. Denn der Sprungprozess aus Gleichung (3.1) wurde mit dem Translationsoperator der flachen Raumzeit spezifiziert. Dabei hat er dafür gesorgt, dass zu einem beliebigen τ die Raumzeitpunkte $\hat{x}_\tau$ und $\hat{x}_{\tau\pm1}$ auf einer geraden Linie $l_\tau = \{\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}_\tau, \hat{x}_{\tau+1} \,|\, \hat{x}_{\tau\pm1} = \hat{T}_{\hat{u}^\pm}\hat{x}_\tau\}$ liegen, wobei die Orientierung der Linie durch $\vec{u}$ aus $\hat{u}^\pm = [\vec{u}^\pm, 1]^T$ gegeben ist. Somit erfolgt die Bewegung geradlinig. Anschließend wurde mit Hilfe des Transformationsverhalten von Quadriken ein Bezug der Quadrik im Punkt $\hat{x}_\tau$ zu der bekannten im Standardcenter hergestellt. Dieser wurde weiter verwendet, um zu sehen, dass der kinematische Constraint für alle τ in seiner Form $\hat{u}^\pm \in Q^\pm_0$ gilt und somit auch für jeden Punkt $\hat{x}_\tau$. Da nun die Quadrik $\hat{Q}^\pm_0$ Abstände entlang einer Linie durch ihr Standardcenter in Vorwärts und Rückwärtsrichtung symmetrisch bzgl. ihrem Standardcenter festlegt, folgt, dass $\vec{u} = \vec{const.}$ $(\forall\,\tau)$ ist, da $\vec{u}$ der Differenzenvektor zwischen benachbarten Punkten auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$ ist (vgl. Abbildung 5) und da $\hat{u}^\pm \in Q^\pm_0$ in jedem Punkt gilt. Somit wurden im kinematischen Constraint die Begriffe geradlinig und konstante Geschwindigkeit codiert. Die realisierten Raumzeitpunkte, die sich somit nach dem Newtonschen Trägheitsprinzip in einer flachen Raumzeit ergeben,

bilden die Teilmenge:

$$l_{kin} = \left\{ l_\tau = \{\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}_\tau, \hat{x}_{\tau+1}\} \,|\, (\forall\, \tau \in \mathbb{K}_p) \;\; \hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}_\tau = \hat{u}_0^\pm \in Q_0^\pm \right\} \subset l_M \tag{3.6}$$

was eine geradlinige gleichförmige Bewegung eines punktartigen Teilchen darstellt, oder ein in Ruhe verharrendes punktartiges Teilchen, falls als Translationsoperator $\hat{T}_{\hat{c}} = [\mathrm{diag}(\mathbb{1}_d, 1)]$ gewählt wird.

Nun stellt sich die Frage, wie realisiert man eine beschleunigte Bewegung im finiten projektiven Raum. Dazu stellt man die These auf, dass sich eine Kraft in einem Punkt dadurch bemerkbar macht, dass das Biquadrik-Feld in diesem Punkt verzerrt ist (vgl. [17]). Das heißt, eine Kraft wirkt im Punkt $\hat{x}'_\tau \in l'_\tau = \{\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}'_\tau, \hat{x}_{\tau+1} \,|\, \hat{x}_{\tau\pm1} = \hat{T}_{\hat{u}_0^\pm} \hat{x}'_\tau\}$ und ändert den Bewegungszustand des punktartigen Teilchens in dieser Umgebung, in dem dieser Punkt $\hat{x}'_\tau$ der lokalen Trajektorie l'_τ, also das Center $\hat{x}'_\tau$ der Quadrik zu diesem Punkt, ausgelenkt wird, sodass sich $l_\tau = \{\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}_\tau, \hat{x}_{\tau+1} \,|\, \hat{x}_{\tau\pm1} = \hat{T}_{\hat{u}_\tau^\pm} \hat{x}_\tau\}$ ergibt, mit $|\vec{u}_\tau^+| \neq |\vec{u}^-{}_\tau| \;\vee\; \frac{\vec{u}_\tau^+}{|\vec{u}_\tau^+|} \neq \frac{-\vec{u}_\tau^-}{|\vec{u}_\tau^-|}$, wobei $\vec{u}_\tau^+$ und $\vec{u}_\tau^-$ aus $\hat{u}_\tau^\pm = [\vec{u}_\tau^\pm, 1]^T$ sind. Vgl. dazu Abb. 6.

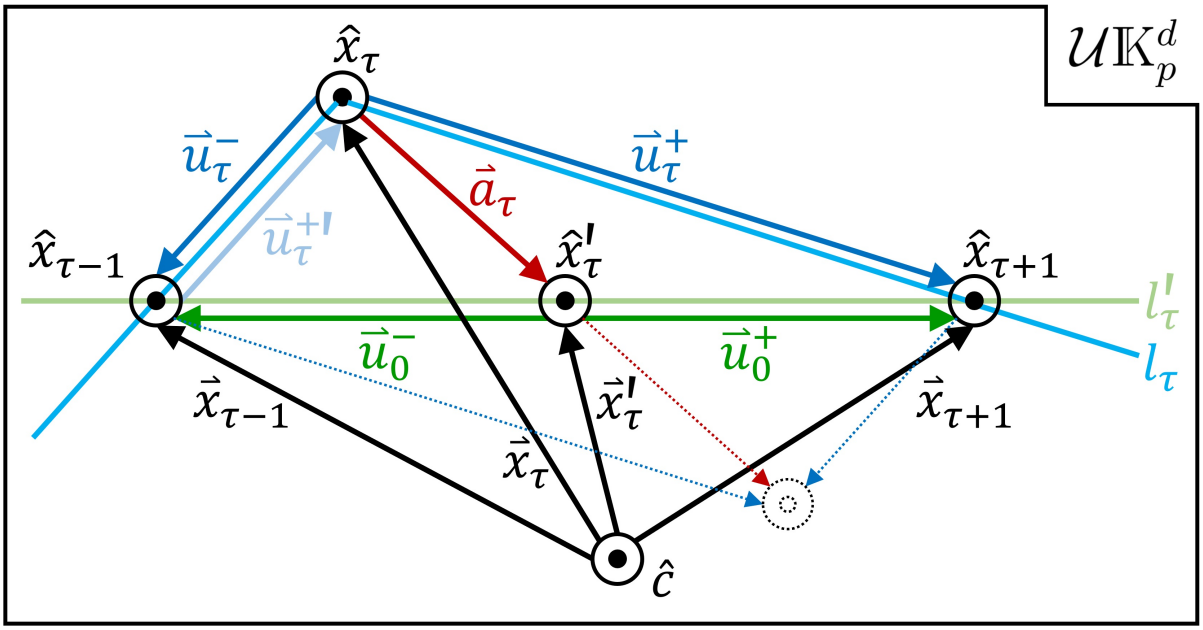


Abbildung 6: Illustration zu den Gleichungen (3.7) & (3.8) und der Definition 3.4. Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint.

Weiter überzeugt man sich, dass die Richtung von $\vec{a}_\tau$ in Abbildung 6 richtig eingezeichnet ist, denn dann kann man mit folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \hat{a}_\tau \oplus \hat{a}_\tau &\equiv \hat{u}_\tau^+ \oplus \hat{u}_\tau^- = \hat{u}_\tau^+ \ominus (\ominus \hat{u}_\tau^-) = \hat{u}_\tau^+ \ominus \hat{u}_\tau^{+\prime} = \\ &= \begin{bmatrix} \vec{u}_\tau^+ \\ 1 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} \vec{u}_\tau^{+\prime} \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{T}_{-\hat{u}_\tau^+} \hat{u}_\tau^+ = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & -\vec{u}_\tau^{+\prime} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_\tau^+ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_\tau^+ - \vec{u}_\tau^{+\prime} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.7}$$

sinnhaft formulieren:

Definition 3.4 (Projektive Beschleunigung und Durchschnittsgeschwindigkeit (vgl. [24])).

Die projektive Beschleunigung ist gegeben durch:

$$\hat{a}_\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{1}_d & \vec{0}_d \\ \vec{0}_d^T & 1 \end{bmatrix} (\hat{u}_\tau^+ \oplus \hat{u}_\tau^-) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\vec{u}_\tau^+ - \vec{u}_\tau^{+\prime}). \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die projektive Durchschnittsgeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$\hat{u}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{1}_d & \vec{0}_d \\ \vec{0}_d^T & 1 \end{bmatrix} (\hat{u}_\tau^+ \ominus \hat{u}_\tau^-) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\vec{u}_\tau^+ + \vec{u}_\tau^{+\prime}). \\ 1 \end{bmatrix}$$

Weiter entnimmt man der Abbildung 6, dass gilt:

$$\hat{u}_0^\pm = \hat{u}_\tau^\pm \ominus \hat{a}_\tau. \tag{3.8}$$

Dies benutzt man nun im kinematischen Constraint $\hat{u}_0^\pm \in Q_0^\pm$, denn weiterhin ist das punktartige Teilchen in jedem Punkt des Raumes träge, d.h:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{u}_0^{\pm T} \hat{Q}_0^\pm \hat{u}_0^\pm = \\ &= (\hat{u}_\tau^\pm \ominus \hat{a}_\tau)^T \hat{Q}_0^\pm (\hat{u}_\tau^\pm \ominus \hat{a}_\tau) = \\ &= (\hat{T}_{-\hat{a}_\tau} \hat{u}_\tau^\pm)^T \hat{Q}_0^\pm (\hat{T}_{-\hat{a}_\tau} \hat{u}_\tau^\pm) = \\ &= \hat{u}_\tau^{\pm T} \hat{T}_{-\hat{a}_\tau}^T \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{a}_\tau} \hat{u}_\tau^\pm \end{aligned}$$

und damit formuliert man:

Definition 3.5 (Dynamischer Constraint).
Als dynamischen Constraint bezeichnet man die zueinander äquivalente Bedingungen:

$$0 = \hat{u}_\tau^{\pm T} \hat{T}_{-\hat{a}_\tau}^T \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{a}_\tau} \hat{u}_\tau^\pm \Longleftrightarrow \hat{u}_\tau^\pm \in Q_{\hat{a}_\tau}^\pm.$$

Dabei ist der dynamische Constraint nichts anderes als das zweite Newtonsche Axiom, ausgedrückt in der finiten projektiven Sprache. Denn der Bewegungszustand l_τ' des Teilchens wurde durch eine Kraft verändert, die sich als Verzerrung der Quadrik bemerkbar macht, indem sie ihr Center auslenkt und dabei werden die Geschwindigkeiten entsprechend der jeweiligen Auslenkung verändert. Außerdem berücksichtigt der dynamische Constraint das jedes massebehaftetes Teilchen dem Trägheitsprinzip folgt. Denn in ihm wurde letztlich codiert, dass die träge lokale Trajektorie l_τ' durch die eingeführte Beschleunigung verzerrt wurde zu l_τ (vgl. Abbildung 6). Dadurch hat man implizit die Nachbarschaft der Punkte $\hat{x}_\tau$ und $\hat{x}_{\tau\pm1}$ gewahrt. Das sieht man, wenn man eine alternativen Weg zum dynamischen Constraint betrachtet. Dazu betrachtet man zunächst die Quadrik im Punkt $\hat{x}_\tau = \hat{x}_\tau' \oplus \hat{a}$ die man mit dem Transformationsverhalten aus Gleichung (2.10) erhält zu:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^\pm\big|_{\hat{x}_\tau} &= \hat{T}_{-(\hat{x}_\tau'+\hat{a})}^T \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-(\hat{x}_\tau'+\hat{a})} = \\ &= (\hat{T}_{-\hat{x}_\tau'} \hat{T}_{-\hat{a}})^T \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{x}_\tau'} \hat{T}_{-\hat{a}} = \\ &= \hat{T}_{-\hat{x}_\tau'}^T \hat{T}_{-\hat{a}}^T \hat{Q}_0^\pm \hat{T}_{-\hat{a}} \hat{T}_{-\hat{x}_\tau'} \,, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Satz B.5 verwendet wurde und im letzten Satz B.6, die beide dem Anhang B entnommen werden können. Weiterhin soll der Sprungprozess auf die Art

und Weise stattfinden, wie er zu Gleichung (3.2) erläutert wurde und damit folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{x}_{\tau\pm1}^T \hat{Q}^{\pm}\big|_{\hat{x}_\tau} \hat{x}_{\tau\pm1} = \\ &= \hat{x}_{\tau\pm1}^T \hat{T}_{-\hat{x}'_\tau}^T \hat{T}_{-\hat{a}}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{T}_{-\hat{a}} \hat{T}_{-\hat{x}'_\tau} \hat{x}_{\tau\pm1}. \end{aligned}$$

Weiter berücksichtigt man, dass

durch Verzerrung l'_τ in l_τ überführt wird.

Dadurch wird $\hat{x}'_\tau \xrightarrow{Verzerrung} \hat{x}_\tau$ verschoben.

Damit wird $\hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}'_\tau = \hat{u}_0^{\pm} \xrightarrow{Verzerrung} \hat{u}_\tau^{\pm} = \hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}_\tau$ verzerrt (vgl. Abbildung 6).

Somit kann man schreiben:

$$0 = \hat{x}_{\tau\pm1}^T \hat{T}_{-\hat{x}_\tau}^T \hat{T}_{-\hat{a}}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{T}_{-\hat{a}} \hat{T}_{-\hat{x}_\tau} \hat{x}_{\tau\pm1}$$

und weiter folgt daraus mit $\hat{u}_\tau^{\pm} = \hat{T}_{-\hat{x}_\tau} \hat{x}_{\tau\pm1}$ der dynamische Constraint:

$$0 = \hat{u}_\tau^{\pm T} \hat{T}_{-\hat{a}_\tau}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{T}_{-\hat{a}_\tau} \hat{u}_\tau^{\pm}.$$

In den Sprungprozess wurden also die Begriffe Trägheit und Beschleunigung codiert, was im dynamischen Constraint resultierte. Die unter diesem realisierbaren Raumzeitpunkte, bilden die Teilmenge:

$$l_{dyn} = \left\{ l_\tau = \{\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}_\tau, \hat{x}_{\tau+1}\} \,|\, (\forall\, \tau \in \mathbb{K}_p) \;\; \hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}_\tau = \hat{u}_\tau^{\pm} \in Q^{\pm}\big|_{\hat{a}_\tau} \right\} \subset l_M, \tag{3.9}$$

was eine beschleunigte Bewegung darstellt. Weiter erhält man aus l_{dyn}, wenn man $\vec{a}_\tau = \vec{0}$ fordert, $l_{kin} \subset l_{dyn}$.

Wie zum Ende von Unterabschnitt 2.3 erwähnt, müssen im Hinblick auf die ART Abstände in jeweiliger Vorwärts- und Rückwärtsrichtung entlang einer Linie durch das jeweilige Center asymmetrisch bzgl. dem jeweiligen Center festgelegt werden. Bedenkt man nun, nach Einstein, dass ein Beobachter in seinem System nicht sagen kann, ob die Beschleunigung die er spürt gravitativen Ursprung hat oder ob sie von der Beschleunigung einer bspw. Rakete herrührt, so sollte man mit verzerrten Quadriken entsprechend Nötiges konstruieren können. Dafür sind dann natürlich entsprechend umfangreicherer Projektivitäten nötig, die mit einer übersetzten Version der Feldgleichungen der ART konsistent sein müssen.

Bislang wurden die Constraints der Mechanik für $\hat{Q}_0^{\pm}$ formuliert. Jedoch wird sich im nächsten Abschnitt zeigen, dass diese neben physikalischen Lösungen auch zu unphysikalischen führen. Man wird sich daher auf $\hat{Q}_0^{+}$ beschränken müssen, damit sich zeitartige Lösungen ergeben. Dabei wird aufgezeigt, wie der Lichtkegel von $\hat{Q}_0^{\pm}$ induziert wird.

Zum Abschluss des Kapitels vergleiche man den kinematischen mit dem dynamischen Constraint in Abbildung 7. In dieser ist die Lösungsmenge der Punkte $\hat{u} = [u_0, u_1, u_2]^T$ bzgl. der Quadrik $\hat{Q}_{\hat{a}}^{+}$ in blau aufgetragen, mit $g_+ \overset{!}{=} 1 \overset{!}{=} g_-$ und der Gleichung:

$$0 = -u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - a_0^2 + a_1^2 - 2(-u_0 a_0 + u_1 a_1). \tag{3.10}$$

Setzt man in dieser $a_0 = 0 = a_1$ so erhält man die Gleichung der Quadrik $\hat{Q}_0^{+}$, deren Lösungsmenge der Punkte $\hat{u} = [u_0, u_1, u_2]^T$ bzgl. ihr in rot aufgetragen sind. Dabei wurde

die Lösungsmenge jeweils über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen aufgetragen. Die Quadrik $\hat{Q}_{\hat{a}}^{+}$ äußert sich in dieser illustrativen Abbildung als eine verschobene bzgl. der $\hat{Q}_{0}^{+}$ (vgl. Abb. 7.1). Der Schnitt mit dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ bewirkt für die Quadrik $\hat{Q}_{0}^{+}$ die symmetrische Abstandsregulierung bzgl. dem Center $\hat{x}'_\tau$ (vgl. Abb. 7.2). Hingegen für die Quadrik $\hat{Q}_{\hat{a}}^{+}$ ein verschobenes Center $\hat{x}_\tau$ (Abb. 7.2). Dabei bewirkt der Parameter a_0 eine Verschiebung der blauen Kegel entlang der $\hat{e}_0$-Achse. Der Parameter a_1 bewirkt eine Verschiebung der blauen Kegel entlang der $\hat{e}_1$-Achse. Man hätte in Gleichung (3.10) auch $u_2 = 1$ setzten können, also die "Höhe" des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^{d=2}$ auf Eins legen können, wie es mit der Wahl der Repräsentanten in Gleichung (2.3) geschehen ist. Denn dann hätte man statt blauen und roten Kegeln, entlang der $\hat{e}_2$-Achse übereinander gestapelte violette und orangene Hyperbelpaare erhalten, welche auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ zum gleichen Resultat wie es in Abb. 7.1 zu sehen ist, geführt hätten. Jedoch wurde absichtlich u_2 variabel gelassen, sodass das Projektive erkennbar wird, also das Skalieren der Repräsentanten mit einem $\lambda \in \mathbb{K}_p$. Was auf eine zur Abb. 7 völlig analoge Abbildung geführt hätte, bloß eben auf eine "hochskalierte" bzgl. der gezeigten.

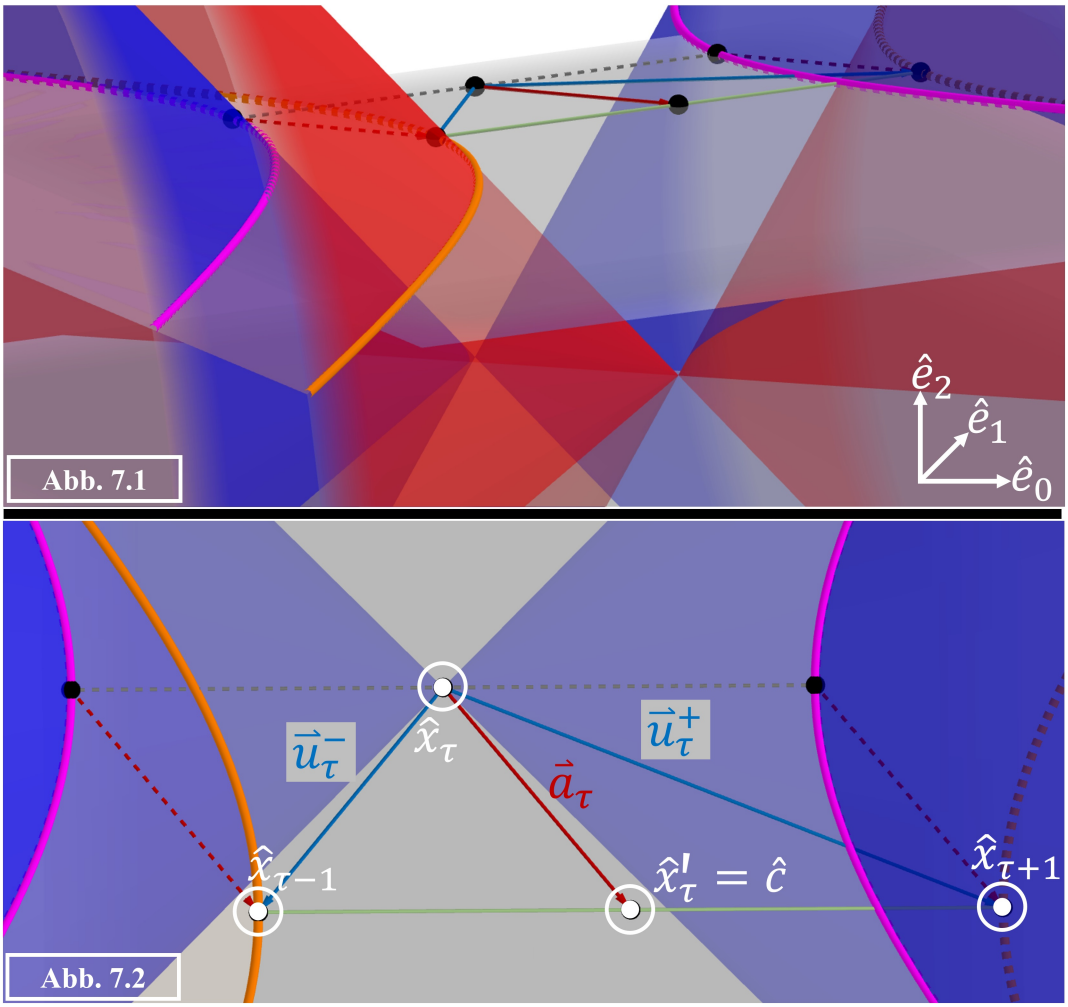


Abbildung 7: Illustration zum kinematischen und dynamischen Constraint. Abb. 7.1: Das blaue Kegelpaar stellt die Lösungsmenge der Gleichung (3.10) über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen dar, mit den willkürlichen Werten $a_0 = -0.5$ und $a_1 = 0.6$. Das rote Kegelpaar stellt entsprechend die Lösungsmenge der Gleichung dar, die sich aus Gleichung (3.10) mit $a_0 = 0 = a_1$ ergibt. Die orangenen bzw. violetten Hyperbelpaare sind die Schnitte der Quadriken $\hat{Q}_{0}^{+}$ bzw. $\hat{Q}_{\hat{a}}^{+}$ mit dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ (obere graue Fläche in Abb. 7.1). Abb. 7.2: Vogelperspektive von Abb. 7.1, wobei ausgewählte Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^2$ auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ mit $\odot$ markiert wurden, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Ebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra.

4. Legendre-Transformation

Auf dem Weg hin zum Induzieren des Lichtkegels soll zunächst die Legendre-Transformation (LT) im finiten projektiven eingeführt werden. Dabei wird im Wesentlichen der Argumentation von Mecke gefolgt (vgl. [22]).

4.1. Legendre-Transformation im reellen Raum

Dazu wird zunächst die geometrische Interpretation der LT im Reellen aufgezeigt, um mit dieser zu sehen, welche geometrischen Größen für diese Dualitätstransformation entscheidend sind.

Betrachtet man zunächst eine Funktion f im Punkt x, dann ist die Tangente an f bei diesem x gegeben[14] durch:

$$g\big|_x = x^*\big|_x \cdot (x' - x) + f\big|_x = g\big|_x(x'), \tag{4.1}$$

wobei x' die Variable der Geraden ist und $x^*\big|_x = \partial_x f\big|_x$ die Steigung der Tangente an f bei der Stelle x bezeichnet. Weiter betrachte man nun x' als fest und g als Funktion $g(x)$, dann ist $g(x)$ eine Tangentenschar, die den Graphen von f einhüllt. Denn die Steigung $x^*\big|_x = x^*\big|_x(x)$ wird als Funktion der betrachteten Stelle aufgefasst, $f(x)$ ist dann die "Höhe" des Punktes des Graphen an den eine Tangente gelegt wird und x in $(x' - x)$ ist die Stelle, wo diese "Höhe" hingehört. Das x' in dieser Tangentenschar-Konstruktion ist beliebig, aber pro Konstruktion festzuhalten. Die letzten Sätze lassen sich auch anschaulicher formulieren. Dafür interpretiert man $x^*\big|_{x'}x' + f\big|_{x'} =: g'$ als die "Start-Tangente" an f im Punkt x' und somit $x^*\big|_x(x' - x) + f\big|_x$ als die von x' nach x verschobene Tangente an f im Punkt x mit angepasster Steigung und "Höhe" (vgl. Abbildung 8).

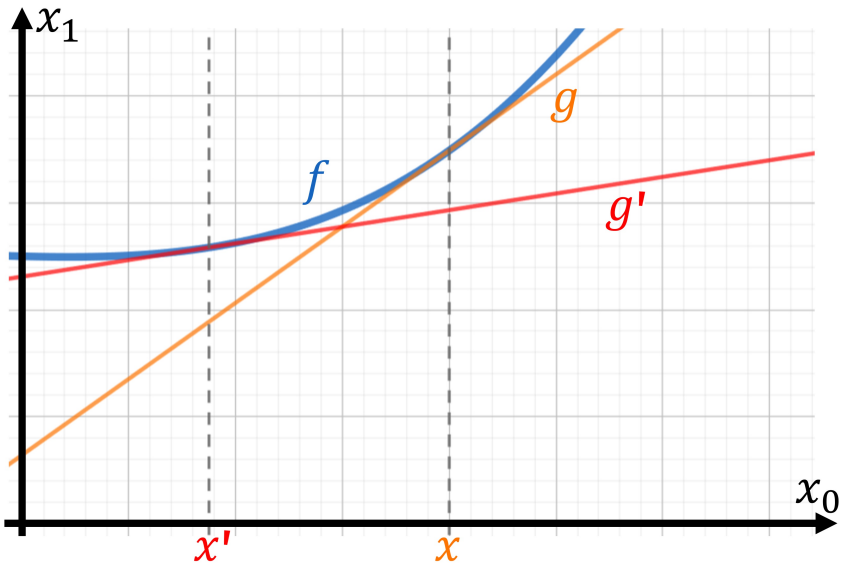


Abbildung 8: Zur Illustration einer Tangentenschar an eine Funktion f. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra.

[14] Die Darstellungsform einer Tangente an eine Funktion f in Gleichung (4.1) folgt aus der Taylorreihen-Entwicklung nach x in erster Ordnung. Hinzunahme von höheren Ordnungen führt auf keine Gerade.

Betrachtet man nun $g\big|_x(x' = 0)$, so ist dieser Wert der Geraden der x_1-Achsenabschnitt t der Tangente an f bei x, also:

$$t\big|_x := g\big|_x(x' = 0) = -x^*\big|_x x + f\big|_x$$

und das für die jeweilige betrachtete Stelle x. Damit lässt sich eine Tangente an f bei x auch formulieren zu:

$$g\big|_x(x') = x^*\big|_x x' + t\big|_x. \tag{4.2}$$

Setzt man nun beide Ausdrücke Gleichung (4.1) und Gleichung (4.2) für die gleichen Geraden g gleich:

$$x^*\big|_x \cdot (x' - x) + f\big|_x = x^*\big|_x x' + t\big|_x,$$

so erhält man:

$$x^*\big|_x x' - x^*\big|_x x + f\big|_x = x^*\big|_x x' + t\big|_x$$

und damit:

$$-t\big|_x = x^*\big|_x x - f\big|_x.$$

Was schließlich die Definition der LT ergibt:

$$f^*(x^*) := -t(x^*) = x^* x(x^*) - f(x^*), \tag{4.3}$$

wobei Invertierbarkeit der Ableitung gefordert wurde, d.h.:

$$[\, x = x(x^*) \Leftrightarrow x^* = x^*(x) \,] \Longleftrightarrow [\, f : konvex \wedge f : differenzierbar \,].$$

Außerdem sollte der Graph von f keinen Wendepunkt besitzen, sonst werden mehrere Achsenabschnitte einer Steigung zugeordnet, was die Bijektivität dieser Definition der LT zu Nichte macht. Zusammenfassend kann man formulieren, dass mit der Menge aller Tupel $(x^*, f^*)\big|_x$, also mit den Steigungen und x_1-Achsenabschnitten, der Graph von f - unter genannten Bedingungen - ohne Informationsverlust rekonstruiert werden kann, da die Tangenten zu diesen Tupel eine einhüllende Schar an den Graphen von f bilden.

Dieses Vorgehen kann man verallgemeinern auf Funktionen f, die von mehreren Variablen $v_0, \dots, v_{d-1}$ abhängen, die als $\vec{v}$ zusammengefasst werden. Dazu betrachtetet man den Graphen einer entsprechenden Funktion $f = f(\vec{v}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v} \\ -f(\vec{v}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^d \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}, \tag{4.4}$$

welcher eine durch die Variablen $\vec{v}$ parametrisierte d-dimensionale Hyperfläche ist. Um nun eine analoge LT zu Gleichung (4.3) zu konstruieren, betrachtet man zunächst die Funktionswerte der tangentialen Hyperebene (vgl. [25] S. 11) im Punkt $\vec{v}$ mit entsprechender Vorzeichenkonvention, wobei mit $\cdot$ das Standardskalarprodukt gemeint ist:

$$G\big|_{\vec{v}} := -\, G'\big|_{\vec{v}} = \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') - f\big|_{\vec{v}}.$$

Dabei bezeichnet $\vec{v}^*\big|_{\vec{v}} = \partial_{\vec{v}} f\big|_{\vec{v}}$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ beim Punkt $\vec{v}$ und ist somit analog zu Gleichung (4.1) zu verstehen. Damit lässt sich im Punkt $\vec{v}$ die tangentiale Hyperebene an F im $\mathbb{R}^{d+1}$ schreiben als:

$$H\big|_{\vec{v}} := \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') - f\big|_{\vec{v}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \vec{v}' \in \mathbb{R}^d \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{4.5}$$

Diese ist i.d.T die tangentiale Hyperfläche an F im Punkt $\vec{v}$. Da erstens der Vektor $(\vec{v}^*\big|_{\vec{v}}, 1)^T$ senkrecht steht, auf die Tangentialvektoren $(-\vec{e}_i, \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}})^T$ (vgl. [26] S. 25-7) die die tangentiale Hyperebene aufspannen. Da zweitens dieser Normalenvektor auf die Punkte führt, die die tangentiale Hyperebene nach der Definition einer Hyperebene (vgl. [27]) bilden, denn:

$$\begin{aligned} &H\big|_{\vec{v}} : \textit{Hyperebene} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow H\big|_{\vec{v}} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ v' \end{pmatrix} \mid h\big|_{\vec{v}} := \left[\begin{pmatrix} \vec{v}' \\ v' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{v} \\ -f(\vec{v}) \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0 \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $(\vec{v}, -f(\vec{v}))^T$ der Aufpunkt der tangentialen Hyperebene im $\mathbb{R}^{d+1}$ an F im Punkt $\vec{v}$. Die Bedingung zur Bildung der Menge ist erfüllt, denn diese ist eine andere Formulierung der entsprechenden Komponente in Gleichung 4.5:

$$\begin{aligned} &h\big|_{\vec{v}} = (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} + v' + f\big|_{\vec{v}} \equiv 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow v' = \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') - f\big|_{\vec{v}}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $(\vec{v}^*\big|_{\vec{v}}, 1)^T$ i.d.T normal zu den Tangentialvektoren $(-\vec{e}_i, \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}})^T$, denn:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\vec{e}_i \\ \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \\ &= -\vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \cdot (0_0, \dots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \dots, 0_{d-1})^T + \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}} = \\ &= -(\vec{v}^*\big|_{\vec{v}})_i + \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}} = \\ &= -\partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}} + \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}} = 0 \ (\forall\, i = 0, \dots, d-1). \end{aligned}$$

Weiter bemerkt man, dass die tangentiale Hyperebene $H\big|_{\vec{v}}$ die x_d-Achse schneidet:

$$H\big|_{\vec{v}} \cap \mathbb{R}\,\vec{e}_d = H\big|_{\vec{v}}(\vec{v}' = \vec{0}\,) = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{v}^*\big|_{\vec{v}} \cdot \vec{v} - f\big|_{\vec{v}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{0} \\ f^*\big|_{\vec{v}} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

auf der "Höhe" $f\big|^*_{\vec{v}}$, wie es im obigen Bsp. die Tangente mit der x_1-Achse getan hat und somit ist auch die LT für mehrere Variablen in analoger Form zu Gleichung (4.3) definiert.

Man vergleiche dazu Gleichung (4.4), Gleichung (4.5) und den Sachverhalt zwischen Normalenvektor und den Tangentialvektoren in Abbildung 9 und insbesondere die Analogie zum zwei dimensionalen Fall hinsichtlich des x_d-Achsenabschnitts.

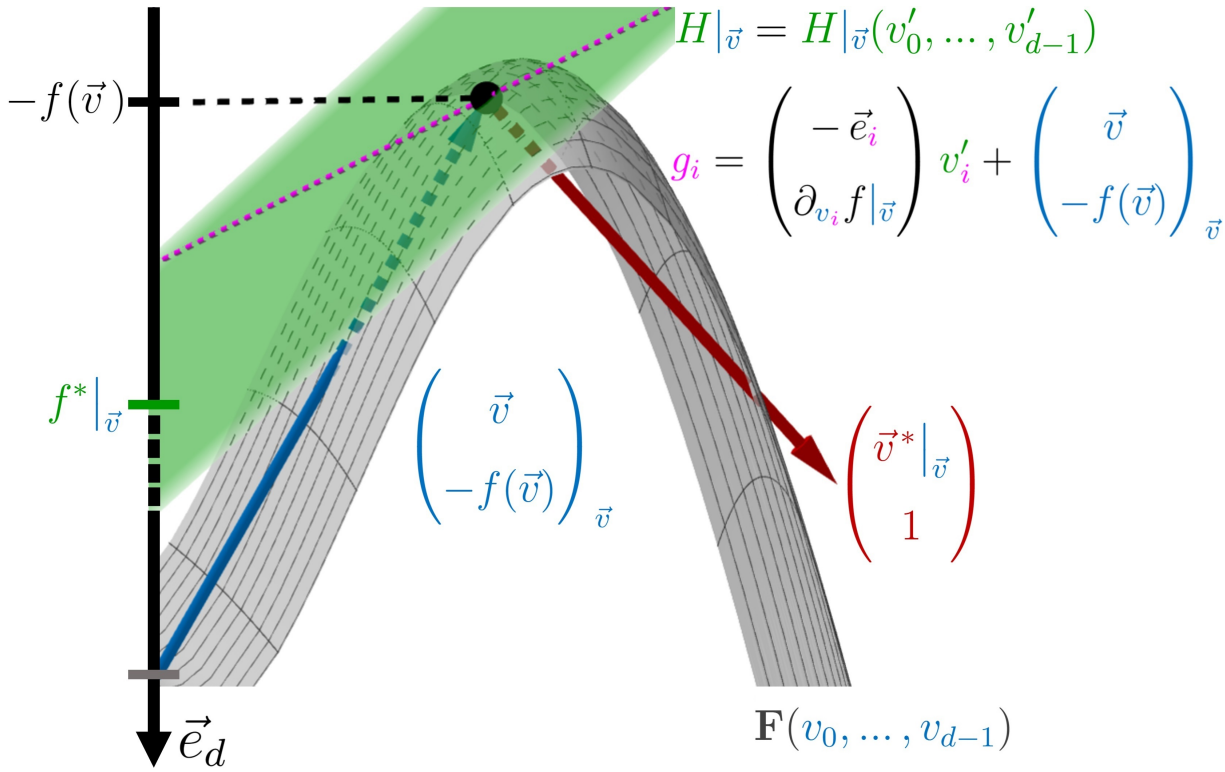


Abbildung 9: Illustration zu den Gleichungen (4.4), (4.5), (4.6) und dem Sachverhalt zwischen Normalenvektor $(\vec{v}^*|_{\vec{v}}, 1)^T$ und den Tangentialvektoren $(-\vec{e}_i, \partial_{v_i} f|_{\vec{v}})$. Dabei ist die Zeichenebene auf abstrakte Weise stellvertretend für den $\mathbb{R}^d$ zu verstehen und die x_d-Achse ragt aus der Zeichenebene heraus $(i = 0, \dots, d-1)$. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra.

Weiter lässt sich die tangentiale Hyperebene in ihrer Hesse-Normalform (vgl. [27]) darstellen. Diese Form der tangentialen Hyperebene wird von den Vektoren gebildet, die im Skalarprodukt mit dem Normalenvektor auf die Ebene den x_d-Achsenabschnitt ergeben:

$$f^*|_{\vec{v}} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ v' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{v}^*|_{\vec{v}} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}' \cdot \vec{v}^*|_{\vec{v}} + v' \Longleftrightarrow v' = f^*|_{\vec{v}} - \vec{v}^*|_{\vec{v}} \cdot \vec{v}'$$

und damit lässt sich die tangentiale Hyperfläche an F im Punkt $\vec{v}$ auch schreiben als:

$$H|_{\vec{v}} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ f^*|_{\vec{v}} - \vec{v}^*|_{\vec{v}} \cdot \vec{v}' \end{pmatrix} \mid \vec{v}' \in \mathbb{R}^d \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{4.7}$$

Mit dieser Form kann man zusammenfassend formulieren, dass mit der Schar all dieser tangentialen Hyperflächen der Graph F rekonstruiert werden kann, wenn man Kenntnis über den jeweiligen Normalenvektor hat, der die Orientierung der jeweiligen Ebene im Raum liefert und wenn man den jeweiligen x_d-Achsenabstand kennt, also wenn man das Tupel $[(\vec{v}^*, 1)^T,\ f^*]_{\vec{v}}$ für alle nötigen Stellen $\vec{v}$ kennt. Diese geometrische Einführung der LT ermöglicht es also, ihr Konzept auf nicht differenzierbare Funktionen zu übertragen, solange man genaue Kenntnis der tangentialen Hyperebenen an den Graph F der Funktion f hat. Dieser Ansatz ist insbesondere nötig, wenn Funktionen $f : \mathbb{K}_p^d \to \mathbb{K}_p$ betrachtet werden, die über endlichen Körpern operieren, in denen keine Ableitung definierbar ist. Denn die Ableitungen bzw. die dualen Größen $\vec{v}^*$ zu $\vec{v}$ werden zu Parametern der tangentialen Hyperebene.

4.2. Legendre-Transformation im finiten projektiven Raum

Mit der geometrischen Perspektive zur LT wird eine finite projektive LT eingeführt, die die gleiche Form, wie in Gleichung (4.6) annimmt. Doch dafür müssen zunächst die Begriffe Pol und Polar eingeführt werden. Weiter soll folgendes zur Notation festgehalten werden.

Definition 4.1 (Skalarprodukt)**.** Sei $\hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ und $\vec{x} \in \mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$, dann ist mit

$\hat{x}^2 := \hat{x} \odot \hat{x} := \hat{x}^T \hat{Q}^{\pm} \hat{x}$,

$\vec{x}^2 := \vec{x} \cdot \vec{x} := \vec{x}^T \eta \vec{x}$ gemeint und mit

$\hat{x}^T \hat{x}$ und $\vec{x}^T \vec{x}$ das Standardskalarprodukt.

Diese Notationen zum Skalarprodukt werden auch im Rest der Arbeit verwendet werden.

Definition 4.2 (Pol und Polar)**.** Sei $\hat{y}$, $\hat{z} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$, dann heißt die Menge:

$\mathrm{pol}(\hat{z}) = \{\hat{y} \,|\, \hat{y} \odot \hat{z} = 0\}$ das Polare zum Pol $\hat{z}$.

Der Polar ist dabei eine Hyperfläche, denn in der Bestimmungsgleichung $0 = \hat{y} \odot \hat{z}$ des Polar sind die z_i jeweils fest, da ein bestimmter Punkt $\hat{z}$ betrachtet wird und zu diesem wird mit den Koordinaten y_i als Koeffizienten in der Bestimmungsgleichung die Hyperfläche gebildet. Denn fasst man die Bestimmungsgleichung als Gleichung eines Gleichungssystems auf, so ist der Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix 1 und damit ihr Defekt, also die Dimension des Lösungsraums gleich d bzgl. des Vektorraums $\mathbb{K}_p^{d+1}$ (vgl. [21] S. 297). Jedoch bzgl. des finiten projektiven Raums $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ ist die Dimension dieser Hyperfläche $(d-1)$. Berücksichtigt man weiter, dass der Polar von $\hat{z}$ das Duale ist, also $\mathrm{pol}(\hat{z}) = \mathrm{dual}(\hat{z})$ (vgl. [28]), so folgt für $(d+1) = 3$ die Dualität vom Beginn der Arbeit. Denn dann ist $\dim(\mathrm{pol}(\hat{z})) = \dim(\mathrm{dual}(\hat{z})) = 1$ und somit liegt dann eine 1-dimensionale Hyperfläche vor, also eine Linie, also das Duale zu einem Punkt im 2-dimensionalen projektiven Raum (vgl. Definition 2.7 ff.).

Betrachtet man nochmals die Bestimmungsgleichung des Polar $0 = \hat{y} \odot \hat{z} = \hat{y}^T \hat{Q}^{\pm} \hat{z}$ und fasst $\hat{Q}^{\pm} \hat{z}$ als $\hat{z}^*$, als das Duale zu $\hat{z}$ auf, weil $\hat{z}^* := \hat{Q}^{\pm} \hat{z}$ der Teil der Bestimmungsgleichung ist, der über die Punkte $\hat{y}$ bestimmt, welche die Hyperfläche bilden dürfen. M.a.W. $\hat{z}^*$ charakterisiert den Polar, welcher das Duale zu $\hat{z}$ ist und somit soll unter $\hat{z}^*$ das Duale in diesem Kontext verstanden werden. Weiter betrachtetet man die Bestimmungsgleichung in der Form $0 = \hat{y}^T \hat{z}^* = y_i z_i^*$ und fasst das Produkt der beiden als das Standardskalarprodukt auf und interpretiert[15] $\hat{y}^T \hat{z}$ als normal zueinander, wegen seiner Gleichheit zur Null. Somit ist die Duale Größe $\hat{z}^*$ normal zu all den Elementen, die aus dem Polar, also aus der Hyperfläche stammen. M.a.W. betrachtet man nur den Repräsentanten $\underline{z}^*$ der Äquivalenzklasse $\hat{z}^*$, so bestimmt dieser Normalenvektor auf die Hyperebene die Orientierung dieser. Berücksichtigt man weiter, dass die Hyperebene also der Polar aus Elementen $\hat{y} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ gebildet wird, welche 1-dimensionale Unterräume vom Vektorraum $\mathbb{K}_p^{d+1}$ sind, also salopp gesprochen Ursprungslinien, so ist die Hyperebene eine Ursprungshyperebene und ihre "Höhe" bzgl. der x_d-Achse ist somit bekannt.

Betrachtet man nun einen Pol $\hat{z}$ der auf der Quadrik liegt, also $\hat{z} \in \hat{Q}^{\pm} \Leftrightarrow 0 = \hat{z} \odot \hat{z} \Rightarrow \hat{z} \in \mathrm{pol}(\hat{z})$ ist. D.h. wenn der Pol auf der Quadrik liegt, dann liegt er auch im Polaren. Damit ist dann das Polare von $\hat{z}$ eine projektive $(d-1)$-dimensionale tangentiale Ursprungshyperfläche

[15] Bislang wurde keine Winkelmessung eingeführt, daher die Interpretation "$\hat{y}^T \hat{z}$ sind normal zueinander".

an die Quadrik, wobei die Orientierung der tangentialen Hyperfläche im Raum durch die duale Größe $\hat{z}^* = \hat{Q}^{\pm}\hat{z}$ zum Pol $\hat{z}$ gegeben ist.

Die so eingeführten Begriffe Pol $\hat{z}$ der auf der Quadrik liegen soll und seine duale Größe $\hat{z}^*$ werden nun genutzt, um im finiten projektiven die Verbindung zur LT aufzuzeigen und das am Bsp. der SRT. Dabei ist nun nicht mehr wie bei der reellen geometrischen LT der x_d-Achsenabschnitt gleich der LT´ten, aber der Normalenvektor $\hat{z}^*$ ist weiterhin eine die tangentiale Hyperebene charakterisierende duale Größe.

Zunächst betrachtet man die projektive Geschwindigkeit $\hat{u}' = [\vec{u}, 1]^T$ und eine flache Raumzeit und definiert den Lagrange-Raum:

$$\tilde{L}_R := \left\{ [\vec{u}, -L(\vec{u}\,)]^T =: \hat{u} \,|\, \hat{u}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{u} = 0 \right\}.$$

Weiter soll analysiert werden, wie seine Elemente aussehen können, daher betrachtet man:

$$\begin{aligned} 0 = \hat{u}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{u} = -u_0^2 + u_1^2 + ... + u_{d-1}^2 \pm L^2 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \pm L^2 = u_0^2 - u_1^2 - ... - u_{d-1}^2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit $g_+ \overset{!}{=} 1 \overset{!}{=} g_-$. Weiter verwendet man die in Definition 2.14 eingeführten Begriffe reguläre Punkte und Punkte im Unendlichen. Dabei haben Punkte im Unendlichen die Charakteristik, dass ihre $(d+1)$-Komponente gleich Null ist und somit keine Elemente des Anschauungsraums $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind. Hier heißt das, dass $L = 0$ sein muss, was der Fall ist, wenn $u_0^2 = u_1^2 + ... + u_{d-1}^2$ ist. Weiter war $\hat{u}^{\pm} := \hat{x}_{\tau\pm1} \ominus \hat{x}_\tau = const.$, da eine flachen Raumzeit ohne Kräfte betrachtet werden soll. Somit ist dann:

$$\begin{aligned} (\forall\, \tau \in \mathbb{K}_p) \;\; \hat{u} &= \begin{bmatrix} -L\mathbb{1}_d & -\vec{x}_\tau \\ \vec{0}^T & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_{\tau\pm1} \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\vec{x}_{\tau\pm1} + L\,\vec{x}_\tau \\ L^2 \end{bmatrix} = \\ &= -L \begin{bmatrix} \vec{x}_{\tau\pm1} - \vec{x}_\tau \\ -L \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{x}_{\tau\pm1} - \vec{x}_\tau \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ -L \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Gleichung $-L = -L$ der letzten Komponente ist offensichtlich auch für $L = 0$ erfüllt. Daher betrachtet man:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\tau\pm1} - \vec{x}_\tau = \vec{u} \;\; \text{bzw.:} \\ (\vec{x}_{\tau\pm1} - \vec{x})^2 = \vec{u}^{\,2} = u_0^2 - u_1^2 - ... - u_{d-1}^2 = \\ \Big|\; L = 0 \Leftrightarrow u_0^2 = u_1^2 + ... + u_{d-1}^2 \\ = u_1^2 + ...u_{d-1}^2 - u_1^2 - ... - u_{d-1}^2 = 0 \end{aligned}$$

D.h. wenn projektive Geschwindigkeiten betrachtetet werden, die im Unendlichen liegen, dann führen diese auf raumzeitliche Abstände zwischen den Ereignissen $\hat{x}_{\tau\pm1}$ und $\hat{x}_\tau$ der Größe Null auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ und das $(\forall\, \tau \in \mathbb{K}_p)$. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $u_0^2 = u_1^2 + ... + u_{d-1}^2$ ist. Für eine leichtere Interpretation betrachtet man zunächst $(d+1) = 3$, dann heißt das, dass $u_0^2 = u_1^2$ ist. Die Menge aller u_0, u_1 die diese Gleichung erfüllen, sind Linien durch den Ursprung auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$, welche den Lichtkegel bilden. Damit wird der

Lichtkegel induziert zu:

$$L_{\hat{c}} := \left\{ \hat{l} := \hat{e}_{d+1} + \hat{u} \,|\, \hat{u} = [\vec{u}, 0]^T \Leftrightarrow \vec{u}^{\,2} = 0 \right\}.$$

Betrachtet man abschließend den allgemeinen Fall $1 = (u_1^2 + ... + u_{d-1}^2)/u_0^2$ und interpretiere u_0^2 als quadratischen Zeitlichen Abstand und die $u_{i>0}^2$ als räumliche quadratische Abstände, weil $(\vec{u}\,)_i = (\vec{x}_{\tau\pm1})_i - (\vec{x}_\tau)_i$ ist. Dann ist die Einheit von $[(u_1^2 + ... + u_{d-1}^2)/u_0^2] = m/s$ was die Lichtgeschwindigkeit in diesem Kontext repräsentieren soll, die aus Kausalitätsgründen nicht überschritten werden soll. D.h. die Geschwindigkeiten deren $\vec{u}^{\,2} \neq 0$ ist, sollen $1 > (u_1^2 + ... + u_{d-1}^2)/u_0^2$ erfüllen. D.h. aber auch, dass das + Zeichen in Gleichung (4.8) zu wählen ist, also dass

$$+L^2 = u_0^2 - u_1^2 - ... - u_{d-1}^2 > 0 \tag{4.9}$$

ist und somit ist Q^+ für physikalisch sinnvolle Resultate zu wählen. Somit betrachtet man nur projektive Geschwindigkeiten:

$$\hat{u} \in L_R := \left\{ [\vec{u}, -L(\vec{u}\,)]^T =: \hat{u} \,|\, \hat{u}^T \hat{Q}_0^+ \hat{u} = 0 \;\wedge\; \vec{u}^{\,2} \neq 0 \right\},$$

wobei $L_R \cup L_{\hat{c}} = \tilde{L}_R$ ist. Damit kann man nun aus dem kinematischen Constraint und der Quadrik der flachen Minkowski-Raumzeit bzw. aus Gleichung (4.9) den Minkowski-Lagrangian ableiten zu:

$$L = \pm\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}}, \tag{4.10}$$

mit $\vec{v} := (u_1, ..., u_{d-1})$ und $u_0 := 1$, wobei mit $u_0 = 1$ die Skalierung der u_0-Koordinate auf 1 normiert wurde. Hätte man statt der Quadrik $\hat{Q}_0^+ = [\mathrm{diag}(-1_0, 1_1, ..., 1_d)]$ der flachen Minkowsik Raumzeit die Newton Quadrik $\hat{Q}_0^N$ verwendet, so hätte man den Lagrangian der klassischen Mechanik konstruiert:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ -L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{0}_d^T & & -1 \\ \vec{0}_{d-1} & \mathbb{1}_{d-1} & \vec{0}_{d-1} \\ -1 & & \vec{0}_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ -L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} +L \\ \vec{v} \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= L + \vec{v}^{\,2} + L \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow L = -\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

In diesem Lagrangian und in dem der flachen Minkowski Raumzeit erscheint kein Potential, da der kinematische Constraint keine Kräfte berücksichtigt.

Nun wird eine spezielle Quadrik $\hat{Q}_0^*$ eingeführt, damit der Hamiltonian so wie er bisher bekannt ist, sowohl für den Lagrangian der klassischen Mechanik als auch für den der SRT in einer konsistenten Weise konstruiert werden kann. Dabei legt diese spezielle Quadrik $\hat{Q}_0^*$ letztlich eine spezielle Abstandsskalierung fest, da:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{u}^T \hat{Q}_0^* \hat{u} = [u_0,\, \vec{v}_{d-1},\, u_d][\mathrm{diag}(-L^*, m, ..., m, m/L)][u_0,\, \vec{v}_{d-1},\, u_d]^T = \\ &= -u_0^2 L^* + m\vec{v}^{\,2} + u_d^2 \frac{m}{L} \equiv -\frac{L^* L}{m} u_0^2 + L\vec{v}^{\,2} + u_d^2 =: -u_0'^{\,2} + \vec{v}'^{\,2} + u_d^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

und dies ist die gleichartige Skalierung, wie sie durch:

$$0 = \hat{u}^T \hat{Q}_0^{\pm} \hat{u} = -u_0^2 + \vec{v}^2 + u_d^2$$

realisiert wird, weshalb auch für $\hat{Q}_0^*$ der kinematische Constraint gelten soll.

Mit dieser speziellen Quadrik kann nun der duale Lagrange-Raum definiert werden zu:

$$L_R^* := \left\{ \hat{u}^* \,|\, \hat{u}^* = \hat{Q}_0^* \hat{u} \ \wedge \ \hat{u} \in L_R \right\}.$$

Denn dessen Elemente $\hat{u}^*$ sind dual zu $\hat{u}$ über den LT-Polar $\mathrm{pol}_{LT}(\hat{u})$ verknüpft:

$$\mathrm{pol}_{LT}(\hat{u}) := \left\{ \hat{u} \,|\, 0 = \hat{u}^T \hat{u}^* = \hat{u} \hat{Q}_0^* \hat{u} \right\}. \tag{4.13}$$

Dessen Bestimmungsgleichung eine andere Formulierung der LT ist, denn:

$$0 = \hat{u}^T \hat{Q}_0^* \hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ -L \end{bmatrix}^T [\mathrm{diag}(-L^*, m, \dots, m, m/L)] \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ -L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -L^* \\ m\vec{v} \\ -m \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow L^* = \vec{v}^T \vec{p} + mL\,. \tag{4.14}$$

Setzt man nun in Gleichung (4.14) den Minkowski-Lagrangian aus Gleichung (4.10) oder den Newton-Lagrangian aus Gleichung (4.11) ein, so erhält man jeweils:

$$L_N^* = \vec{v}^T \vec{p} - \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \tag{4.15}$$

$$L_M^* = \vec{v}^T \vec{p} - m\sqrt{1 - \vec{v}^2}, \tag{4.16}$$

wobei für L_M^* das negative Vorzeichen der Wurzel in Gleichung (4.10) gewählt wurde.

Nun stellt sich die Frage, wie rechtfertigt man es mathematisch sauber, dass $\hat{Q}_0^*$ verwendet wurde statt $\hat{Q}_0^+$. Vor Allem, wenn man $\hat{L} = [\mathrm{diag}(\sqrt{L^*}^{-1}, \sqrt{m}^{-1}, ..., \sqrt{m}^{-1}, \sqrt{m/L}^{-1})]$ zunächst als Projektivität annimmt und dann $\hat{Q}_0^* = \hat{L}^{-T} \hat{Q}_0^+ \hat{L}^{-T}$ konstruiert. Denn dann müsste man auch $\hat{u}' = \hat{L}\hat{u}$ transformieren. Dann heben sich aber die Projektivitäten $\hat{L}$ beim Aufstellen des kinematischen Constraints in Gleichung (3.5) auf. Somit stellt sich hier die Frage, kann man es mathematisch sauber definieren, sodass mathematisch strickt streng keine Widersprüche auftreten, mit dem Ziel, dass man die Hamiltonian in Gleichung (4.15) und Gleichung (4.16) in einer konsistenten Weise konstruieren kann.

Einerseits hat man gesehen, dass es möglich ist die Lagrangian mit der Wahl der Quadrik $\hat{Q}_0$ bzw. $\hat{Q}_0^N$ zu konstruieren, die zur jeweiligen Raumzeit die betrachtetet werden sollen gehören. Somit könnte man $\hat{Q}_0^*$ als spezielle Legendre-Transformation-Quadrik definieren, die es erlaubt zu einem gegebenen Lagrangian den zugehörigen Hamiltonian über den von ihr induzierten LT-Polar aus Gleichung (4.13) zu konstruieren.

5. Flache Raumzeit im finiten projektiven Raum

Bevor der dynamische Constraint, der in Abschnitt 3 eingeführte wurde in dem dieser Arbeit zugrundeliegenden mathematischen Konstrukt verwendet wird, werden Eigenschaften des Konstrukts in der Praxis aufgezeigt. Daher wird nun zunächst die Struktur des zugrundeliegenden Körpers $\mathbb{K}_p$ in Bezug zur Minkowski-Quadrik $Q_0^{\pm}$ zum Standardcenter untersucht, wobei alle Rechenoperationen in diesem Kapitel modulo einer 3 mod 4 Primzahl erfolgen, sofern nicht explizit etwas anders vermerkt wird. Die dabei vorkommenden Abbildungen sind mit einem selbst erstellen Python-Modul angefertigt worden. Dieses verwendet aber auch übliche Python-Modulo wie Numpy, Matplotlib und andere, siehe Zelle Modulimport im Quellcode. Der Quellcode befindet sich im Ordner der mit dem Link, der im Literaturverzeichnis in der Quelle [29] hinterlegt ist, abgerufen werden kann. Der Code ist open-source, kommentiert und stimmt in der Notation mit dieser Arbeit im wesentlichen überein. Er sollte daher zusammen mit dieser Arbeit nachvollziehbar sein. Ein grober Überblick über seine Funktionalität ist im Anhang E zu finden. Weiter ist es von Vorteil, manche der Abbildungen mit den an den entsprechenden Stellen hinterlegten Links abzurufen, da sie dann in einer höheren Auflösung betrachtet werden können. Dabei wird in der Bildunterschrift der i-ten Abbildung ein in digitaler Form klickbarer "Link {i}" zu finden sein, wobei für die schriftliche Form ein Verzeichnis im Anhang C angelegt wurde. Im Fall, dass auf eine Sammlung von Abbildungen verwiesen wird, welche ergänzend zu den hier gezeigten zu verstehen ist, empfiehlt es sich den verlinkten Ordner herunterzuladen. Denn die Namen der Abbildungen führen auf eine logische Reihenfolge in der die Sammlung das zeigt, was sie versucht zu zeigen. Dabei hält der File-Explorer unter Windows die Sortierreihenfolge bzgl. dem Namen ein, wohingegen die Sortierung nach dem Namen unter dem jeweils hinterlegten Link nicht korrekt im Browser umgesetzt wird.

Angenommen, die finite projektive Geometrie ist eine geeignete Wahl für die Beschreibung der Natur, dann sollte sie es aber auf kleinen Skalen sein. Denn in diesem mathematischen Konstrukt ist kein Abstandsbegriff im herkömmlichen Sinne definierbar. Stattdessen wird mit der Quadrik und einer Geraden, auf dem affinen Unterraum $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ ein Schnitt gebildet und somit eine Einheitslänge festgelegt. Dieser die uns kleinst bekannten Längen zuzuordnen, Planklänge und Plankzeit, scheint sinnvoll. Dann bedarf es aber eines Limes, der auf große Skalen führt und somit auf Ergebnisse, die aus dem Reellen bekannt sind. Dieses Argument wird in Abschnitt 6 noch weiter ausgeführt.

Doch zunächst soll die zwei dimensionale flache Raumzeit im finiten projektiven untersucht werden, also die Minkowski-Quadrik aus Gleichung (2.7):

$$\hat{Q}_0^{\pm} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm g_{\pm}^2 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Bewusst wurde im vorherigen Satz "zwei dimensionale flache Raumzeit" geschrieben, da der affine Unterraum $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^{d=2}$ der Raum der Anschauung ist, welcher eine zwei dimensionale Raumzeit ist, die ihre Struktur durch die Form der Minkowski-Quadrik erhält. Dabei ist der $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^{d=2}$ im $\mathbb{K}_p^{d=3}$ eingebettet, was die zusätzliche Dimension also den dritten Eintrag in der Quadrik der Gleichung (5.1) erklärt. Diese zusätzliche Dimension hat man sich automatisch "eingefangen" als man einen koordinatisierten finiten projektiven Raum als minimales mathematisches Konstrukt zur Beschreibung der Natur gewählt hat (vgl. die S. 4, Definition 2.11 und Korollar 2.3). Eine Koordinate x_d dieser zusätzlichen Dimension wird im Weiteren, anschaulich gesprochen, als Höhe bezeichnet, bei der der $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ betrachtet werden soll und mit $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d\big|_{x_d}$ notiert. Dabei sind die sich ergebenden Strukturen der Raumzeit im $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ für die jeweiligen Höhen quasi äquivalent. Dies sieht man, wenn man zunächst die Struktur der flachen Raumzeit zu einer festen Höhe x_d betrachtet, die durch die Gleichung:

$$\mp(g_{\pm}x_d)^2\big|_{x_d} = -x_0^2 + x_1^2 + ... + x_{d-1}^2 \tag{5.2}$$

gegeben ist und den rechten Teil der Gleichung (5.2) als raumzeitlichen Abstand $\Delta^2 s = (\vec{x} - \vec{0})^2$ zum Ursprung $\vec{0}$ des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d\big|_{x_d}$ interpretiert. Damit hat jeder Punkt, der Lösung der Gleichung (5.2) ist, den raumzeitlichen Abstand $\mp(g_{\pm}x_d)^2\big|_{x_d}$. Somit hat jeder Lösungspunkt auf der Höhe $x_d = 1$ und bei einer zueinander symmetrischen Skalierung von räumlichen und zeitlichen Koordinaten (vgl. Erläuterungen zu Gleichung (2.7)), also für $g_+ = 1 = g_-$, einen raumzeitlichen Abstand zum Ursprung von Eins. Für eine andere Höhe $x_d' = \lambda \cdot x_d\big|_{x_d=1}$ ist der raumzeitliche Abstand lediglich um λ skaliert, die Struktur selbst ist somit quasi äquivalent. Dies kann man sich im Reellen leicht anschaulich klar machen. Denn im Reellen sind die Schnitte der Minkowski-Quadrik mit dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^{d=2}$ kontinuierliche Hyperbeln, die sich für wachsende Höhen auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^{d=2}$ entlang von seinem Ursprung entfernen und somit skalierte Einheitslängen festlegen (vgl. Abb. 3). Auf finiten Körpern liegt diese anschauliche Interpretation von Gleichung (5.2) nicht wie im Reellen vor. Denn die Form des Graphen, also der Schnitt der Quadrik mit dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d\big|_{x_d}$, ist $\forall\, x_d \in [1; (p-1)/2]$ eine andere und das vermutlich für alle $p \in \mathbb{P}$ und nicht nur für einige p die für die numerischen Simulationen gewählt wurden, die im Folgenden erläutert werden. Jedoch hat auch im finiten projektiven Raum jeder Lösungspunkt der Gleichung (5.2) den raumzeitlichen Abstand $\mp(g_{\pm}x_d)^2\big|_{x_d}$ zum Ursprung. Damit liegt auch im finiten projektiven Raum für jede Höhe die quasi äquivalente raumzeitliche Struktur vor, obwohl die Veranschaulichungen

der Lösungsmengen auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ kontraintuitiv mit den Vorstellungen aus dem Reellen sind.

Plots der Minkowski-Quadrik, also Plots der Gleichung (5.2), sind prinzipiell dadurch zustande gekommen, dass entsprechend der Dimension d-viele Schleifen genutzt wurden, um das d-fache Kartesische Produkt des zugrundeliegenden Körpers $\mathbb{K}_p$ zu bilden. Die dabei zustande kommenden Punkte wurden jeweils in den Minkowski-Constraint, also Gleichung (5.2) eingesetzt. Falls der jeweilige Punkt den Constraint erfüllt hat, wurde er abgespeichert. Bei anschließender Betrachtung der Visualisierung der sich ergebenden Lösungsmengen, für ein p zu verschiedenen Höhen $x_{d=2}$ über dem Körper $\mathbb{K}_p$, stellt man fest, dass die diskreten Punkt-Muster nicht notwendigerweise stets an diskrete Hyperbeln erinnern. Viel mehr ergeben sich für jede Höhe unterschiedliche Muster, welche pro Höhe über verschiedene p hinweg zudem auch nicht gleich sind (vgl. Abbildung 10). Dennoch wurde "viel" herumprobiert, um Gemeinsamkeiten in diesem scheinbaren Chaos zu finden.

Als erstes fällt auf, beim Begutachten verschiedener Höhen für verschiedene Primzahlen, dass es so aussieht, dass die Anzahl der Quadrik-Punkte pro p über die Höhen hinweg gleich ist. Deshalb wurde dies für $3 \bmod 4 \equiv p \in [0\,;\,600] \cup 1091 =: \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\,\cdot]} \subset \mathbb{P}$ überprüft. Dafür wurde zunächst für die genannten p die Lösungen für die jeweiligen möglichen Höhen $x_{d=2} \in [1\,;\,(p-1)/2] =: H_p$ berechnet. Anschließend wurde die Anzahl $N^{\pm}_{p,x_d}$ der Lösungen pro Höhe x_d und p gezählt[16], jeweils für die plus und minus Minkowski-Quadrik $Q_0^{\pm}$ zum Standardcenter. Wenn diese für ein p über die verschiedenen Höhen hinweg konstant war, wurde diese Anzahl gespeichert. Abschließend wurde geprüft, ob die Anzahl dieser gespeicherten $N^{\pm}_{p,x_d}$-Zahlen gleich der Anzahl der verwendeten p war. Falls das der Fall ist wird vom PC ein $True$ als Rückmeldung ausgegeben, was für die genannten p der Fall war. Kompakter ausgedrückt:

$$\begin{aligned} N_p^{\pm} &:= \left\{ N^{\pm}_{p,x_{d=2}} \,|\, (\forall\, x_{d=2} \in H_p)\ N^{\pm}_{p,x_{d=2}} = const. \right\} \\ &\sum_{p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\,\cdot]}} \left| N_p^{\pm} \right| \equiv \left| \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\,\cdot]} \right| \Rightarrow True. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Für eine $\mathbb{Z}_{z_0}$- oder $\mathbb{Q}_{z_0}$-Näherung war dies nicht der Fall, dabei werden bei diesen Näherungen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ durch ein $z_0 = z_0(p)$ beschränkt, sodass sie endlich sind. Doch zu diesen Näherungen im Verlauf des Abschnittes mehr. Für den Körper $\mathbb{R}$ hingegen würden sich offensichtlich für jede Höhe aus $\mathbb{R}$ die gleichen Hyperbeln ergeben. Abschließend wurde für jedes $p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\,\cdot]}$ festgestellt, dass die über die verschiedenen Höhen hinweg konstante Anzahl von Lösungen $N^{\pm}_{p,x_2}$ für die verschiedenen p gegeben ist durch $p-1$. M.a.W:

$$(\forall\, p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\,\cdot]})\ N^{\pm}_{p,x_{d=2}} \equiv p-1 \tag{5.4}$$

Die Vermutung, dass die in Gleichung (5.3) & (5.4) gefundenen Resultate ($\forall\, p \in \mathbb{P}$) gelten[17], scheint berechtigt zu sein. Warum es sich lohnen würde, diese Gleichungen mathematisch fundiert für alle p zu begründen, folgt im Verlauf des Abschnittes. Doch zunächst soll eine weitere interessante Beobachtung hervorgehoben werden.

Sei die Anzahl der Lösungen $N^{\pm}_{p,x_2}$ pro Höhe für ein p gegeben durch $p-1$, wobei die Anzahl der möglichen Höhen durch $(p-1)/2 = |H_p|$ unmittelbar durch Gleichung (2.3) gegeben ist.

[16] Dabei meint gezählt eine Mächtigkeit-Messung der Menge durch den PC.
[17] Ein Beispiel für $p = 143 \neq 3 \bmod 4$ wurde geprüft, für dieses gilt Gleichung (5.3) & (5.4) ebenso.

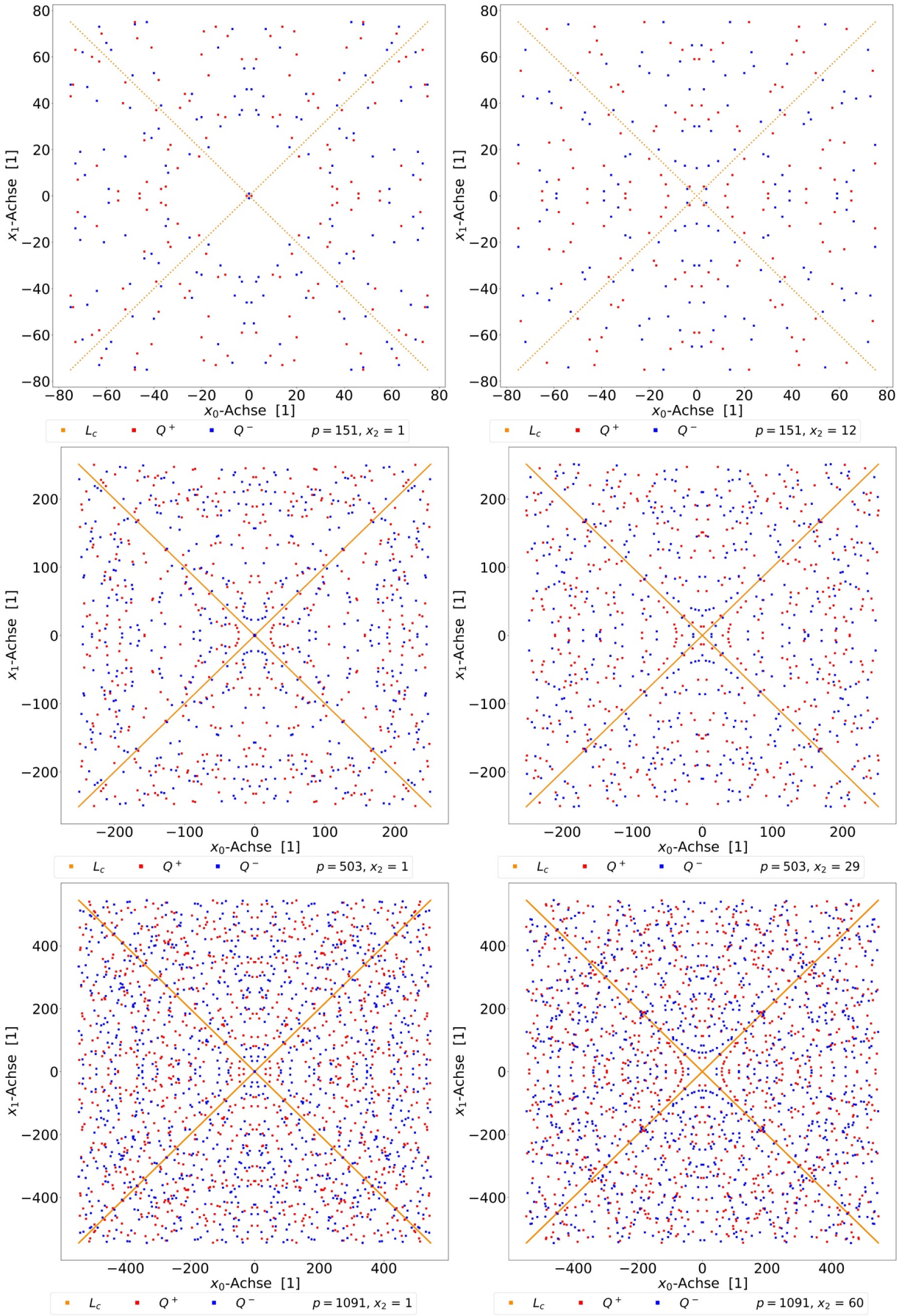


Abbildung 10: Lösungen der Minkowski-Quadrik $Q_0^{\pm}$ für Primzahlen p und Höhen x_2, Lichtkegel L_c. Links: $x_2 = 1$. Rechts: Diverse x_2. Höhere Auflösung unter Link {1}.

Weiter seien, da die Muster für die verschiedenen Höhen immer unterschiedlich[18] sind, die Lösungen zu einem p für jede Höhe unterschiedlich. Dann ist die Gesamtanzahl der Lösungen der plus-minus-Quadrik für alle Höhen $x_{d=2} \in H_p$ gegeben durch:

$$\left|Q^{\pm}_{0,H_p}\right| = 2 \cdot (p-1) \cdot (p-1)/2 = p^2 - 2p + 1.$$

Addiert man hierzu noch die Anzahl der Lichtkegel-Punkte $|L_{c,p}| = 2p - 1$, wobei eine Diagonale durch p-Punkte gegeben ist und der Ursprung nicht doppelt zu zählen ist, so erhält man:

$$\left|Q^{\pm}_{0,H_p}\right| + |L_{c,p}| = p^2 - 2p + 1 + 2p - 1 = p^2 \equiv \left|\mathbb{K}^2_p\right|. \tag{5.5}$$

Um diese Vermutung zu bekräftigen, also dass die Lösungen pro Höhe unterschiedlich sind, wurden die Lösungen aller Höhen zu einem p in einer Ebene dargestellt[19] und das jeweils ($\forall\, p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\cdot]}$). Denn sollten die Lösungen i.d.T für alle Höhen zu einem festen p unterschiedlich sein, so sollte sich ein Muster im Plot ergeben, dass die komplette Ebene $\mathbb{K}^2_p = \mathbb{K}_p \times \mathbb{K}_p$ bis auf den Lichtkegel ausfüllt. Denn wie zu den Gleichungen (5.3) & (5.4) erläutert wurde ist zu einem $p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\cdot]}$ die Anzahl der Lösungen über die Höhen hinweg konstant und durch $p - 1$ gegeben. Wenn nun aber die Lösungen zu einem p über die Höhen hinweg teilweise gleich sein sollten, dann werden neben dem Lichtkegel Lücken in den Plots zu sehen sein. Für die Primzahlen $p = 151, 523, 1091$ sind in der Abbildung 11 links die Lösungen aller möglichen Höhen zum jeweiligen p in einer Ebene dargestellt. Für alle anderen $p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\cdot]}$ ergaben sich ebenfalls Plots, die die gesamte Ebene $\mathbb{K}^2_p$ bis auf den Lichtkegel ausfüllen und diese sind unter dem Link {4.1} abrufbar. Begutachtet man nun diese Abbildungen mit der Methode des kontinuierlichen Anstarrens[20], so kommt man zu der Vermutung, dass wenn man alle roten Punkte, also die Lösungen Q^{+}_{0,H_p}, aus dem oberen Lichtkegel-Quadranten um 90° im mathematischen Drehsinn um die x_2-Achse rotiert, dass sie dann genau an den Stellen landen, an denen momentan blaue Punkte, also Lösungen Q^{-}_{0,H_p}, im linken Lichtkegel-Quadranten sitzen. Entsprechend sollten die roten Punkte aus dem unteren Lichtkegel-Quadranten bei einer Drehung um 90° im mathematischen Drehsinn um die x_2-Achse, die blauen im rechten Lichtkegel-Quadranten überdecken. Analog dazu verfährt man mit den blauen Punkten aus dem linken und rechten Lichtkegel-Quadranten. Mit diesem Vorgehen erhält man zwei Dreiecke, die vollständig mit roten Punkten ausgefüllt sind und zwei die mit blauen Punkten ausgefüllt sind (vgl. Abbildung 11 rechts). Ein dazu analoges Resultat erhält man ebenfalls ($\forall\, p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\cdot]}$) und ist in den Plots, die unter dem Link {4.2} aufrufbar sind, nachvollziehbar.

Somit wurde zumindest ($\forall\, p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\cdot]}$) gezeigt, dass die $p-1$ Lösungen pro Höhe einzigartig sind. Daher füllt die Darstellung der Lösungen aller Höhen in einer Ebene den gesamten $\mathbb{K}^2_p$ bis auf den Lichtkegel aus, ohne das dabei Lösungspunkte doppelt vorkommen. Mit einer Rotation der entsprechenden Punkte, wie zuvor beschrieben, erhält man für all die genannten p ein zu $\mathbb{R}$ analoges Bild. Denn blickt man im $\mathbb{R}^3$ auf die (x_0, x_1)-Ebene, während in ihm die Minkowski-Quadrik für $d = 2$ dargestellt wird, so sieht man kontinuierlich ausgefüllte rote und blaue Dreieckspaare (vgl. Abbildung 7).

[18] Man klicke sich durch die Zahlreichen Abbildungen, die unter dem Link {2} zu finden sind.

[19] Man blickt also von "oben" auf die Überlagerung aller $\mathcal{U}\mathbb{K}^2_{p=const.}$ zu den jeweiligen Höhen.

[20] Es ergab sich dabei auch noch die Vermutung, dass die höhenüberlagerten Muster über verschiedene p hinweg mit einander zusammenhängen. Die Plots unter dem Link {4.3} zeigen jedoch keinen klaren Zusammenhang.

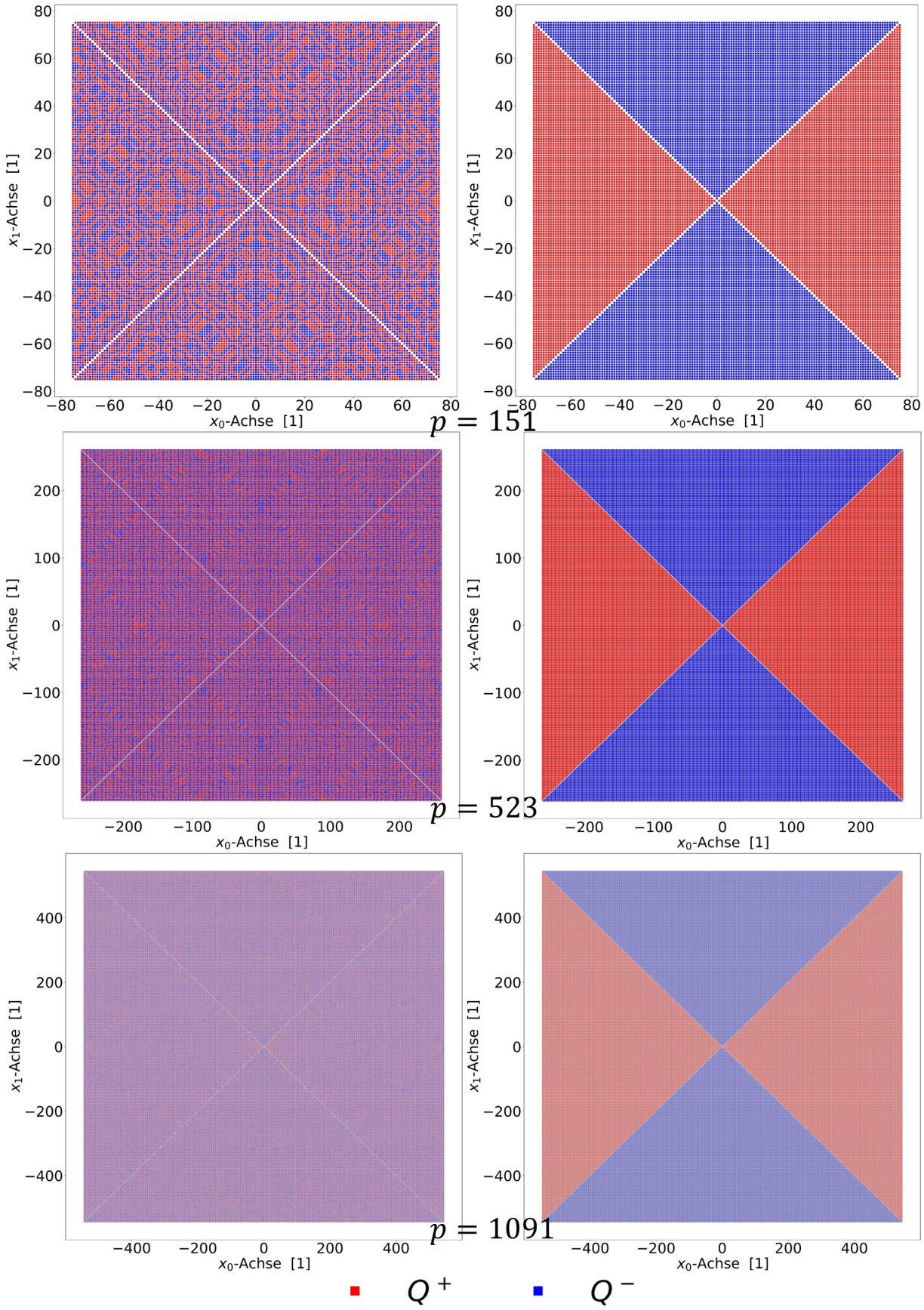


Abbildung 11: Minkowski-Quadrik $Q_0^{\pm}$. Links: Lösungen aller Höhen in einer Ebene dargestellt, für die jeweiligen $p = 151, 503, 1091$. Rechts ist durch Rotation der entsprechenden Punkte, wie im Absatz zu Gleichung (5.5) beschrieben, aus dem zugehörigen linken Plot entstanden. Höhere Auflösung unter Link {3}.

Die zuvor beschriebene Rotation der Lösungspunkte wurde nur verwendet, um zu sehen, dass sich dann ein zu $\mathbb{R}$ analoges Bild ergibt. Denn sie verändert die Lösungsmenge wie sie wirklich über dem Körper $\mathbb{K}_p$ vorkommt auf eine unzulässige Weise. Dennoch konnte man damit sehen, dass auch über $\mathbb{K}_p$ Punkte auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2\big|_{x_d}$ zu den verschiedenen Höhen x_d durch Linien, also durch Äquivalenzklassen gegeben sind. Allerdings springen diese Linien von Höhe zu Höhe scheinbar wild umher und verhalten sich nicht wie in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ sind es unendlich viele und unendlich dichte geradlinige Linien, also Geraden, die zu kontinuierlich ausgefüllten Dreiecken führen, bei einem Blick von oben auf die Bi-Kegel. Das durch p charakterisierte Muster der umher springenden Äquivalenzklassen in Abbildung 11 links ist auf die in $\mathbb{K}_p$ notwendige modulare Addition und Multiplikation zurückzuführen. Auch wenn die Linien deshalb über die Höhen hinweg umher springen, liegt mit dem bisher Gesehenen die Vermutung nahe, dass sich eine Lösungsmenge von Punkten auf eine andere Höhe skalieren lässt und dann i.d.T. Lösungsmenge auf dieser Höhe ist, analog zu $\mathbb{R}$. Dabei ist mit dem auf eine andere Höhe skalieren gemeint, dass ein jeder Punkt der formell berechneten Lösungsmenge, wie es bisher immer geschehen ist, mit einem Skalar multipliziert wird. Es bietet sich also an, einen jeden Punkt der berechneten Lösungsmenge für die Höhe $x_d = 1$ mit einem $x_d' \in H_p$ zu multiplizieren und mit der zugehörigen formell berechneten Lösungsmenge für die jeweilige Höhe zu vergleichen, ob i.d.T. die identisch gleichen Lösungsmengen vorliegen. In $\mathbb{R}$ ist es intuitiv klar, dass dies der Fall sein wird. Auch in $\mathbb{K}_p$ muss es wegen $\hat{x} \equiv \lambda \cdot \hat{x}$ und der Tatsache, dass nur homogene Constraints behandelt werden, in denen ein skalares vielfaches keine Rolle spielt, ebenso funktionieren. Dennoch machen Bilder, wie sie in Abb. 11 links zu sehen sind, das Ganze kontraintuitiv. Deshalb wurde $(\forall\, p \in \mathbb{P}^{3\mathrm{m}4}_{[\cdot\,,\,\cdot]})$ zunächst die Lösungsmenge formell für die Höhe $x_2 = 1$ der Minkowski-Quadrik berechnet. Anschließend wurde zu einem p die Lösungsmenge zur Höhe $x_2 = 1$ auf alle Höhen $x_2' \in H_p$ jeweils skaliert und gespeichert. Abschließend wurden all diese skalierten Lösungsmengen mit den zugehörigen formell berechneten Lösungsmengen für die jeweilige Höhe, für alle genannten p auf Identität überprüft. Wie zu erwarten war, wurde die Gleichheit verifiziert, durch die Ausgabe eines $True$ vom PC nach Prüfung der entsprechenden Bedingungen. Zudem kann man sich visuell davon überzeugen, zumindest für einige p und Höhen, in dem man die Plots unter dem Link {5} abruft.

Das heißt, obwohl sich für die jeweiligen Höhen zu einem p einzigartige Muster ergeben, sind die jeweiligen Punkte des Musters über die Höhen hinweg die Gleichen, da sie jeweils einer Äquivalenzklasse angehörig sind, auch wenn ihre Position sich nicht wie in $\mathbb{R}$ mit dem Verhalten einer Gerade erklären lässt. Sondern durch Linien, die wegen des modularen Charakters der Verknüpfungen über die Höhen hinweg umher springen.

Das umher Springen der Äquivalenzklassen, welche in $\mathbb{R}$ simple Geraden sind, soll mit der Abbildung 12 veranschaulicht werden. In dieser wurde der Übersichtlichkeit halber nur den Lösungen der positiven Quadrik Q_0^+ Zahlen zur Identifizierung der Äquivalenzklassen, über die Höhen hinweg, zugewiesen. Dabei muss an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, wie diese Plots zustande gekommen sind. Denn es wurde die formal berechnete Lösung zur Höhe $x_2 = 1$ auf die jeweils dargestellten Höhen skaliert. Was, wie aufgezeigt, kein Problem darstellen darf. Es wurde dieser Weg gewählt, da es programmiertechnisch dann wesentlich einfacher ist, die Äquivalenzklassen über die Höhen hinweg zu verfolgen. Denn hat man die Lösungen zu einer Höhe, dann sind diese ein zweidimensionales Array, dessen Zeilen Punkte, also Lösungen darstellen. Nun ergibt sich die Lösung zu einer anderen Höhe durch Multiplikation der Punkte mit dem entsprechenden Skalar. Somit weiß man, dass die i-te Zeile für jede Höhe die i-te Äquivalenzklasse ist.

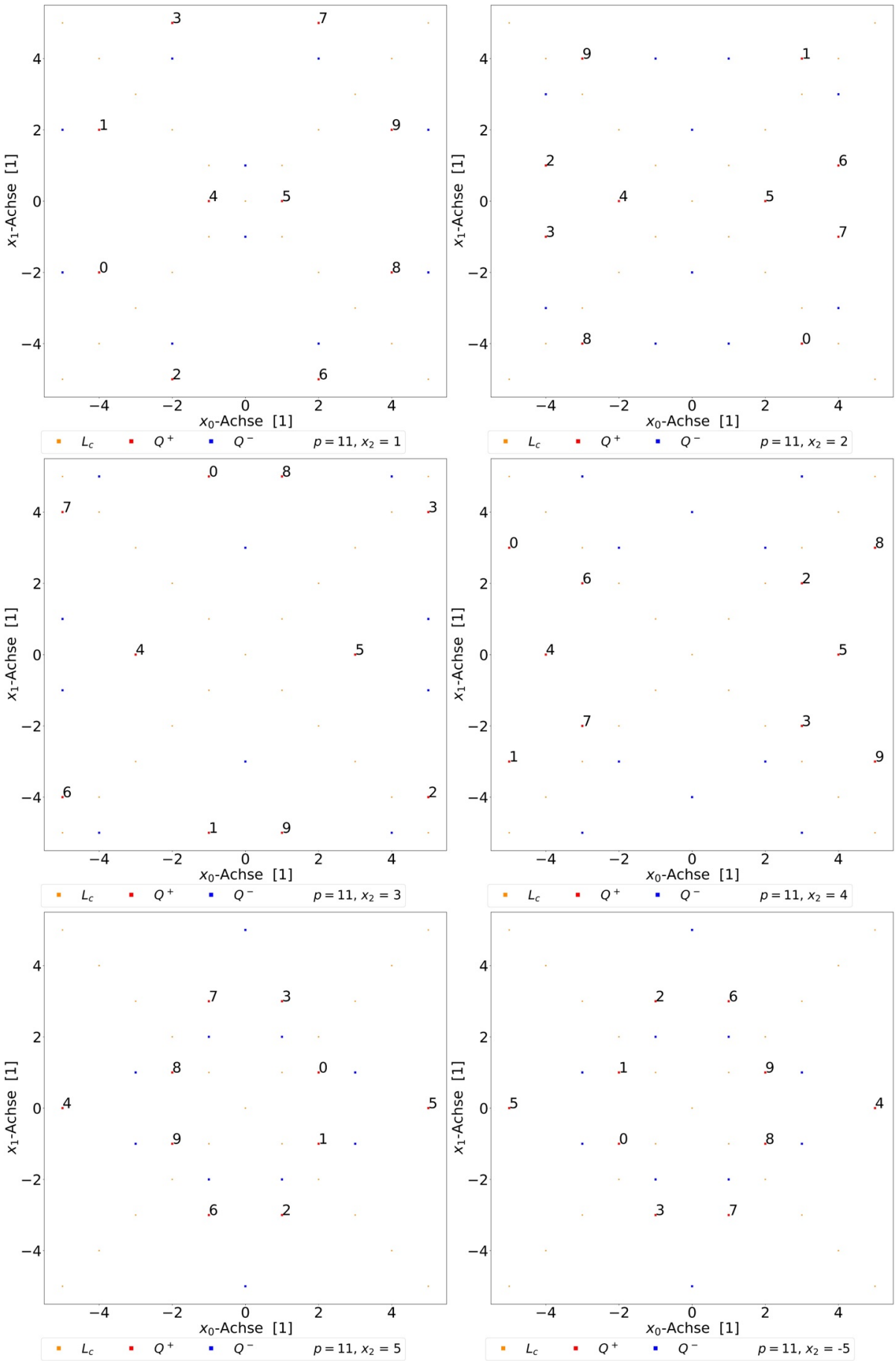


Abbildung 12: Minkowski-Quadrik $Q_0^{\pm}$, Lichtkegel L_c. Verhalten der Äquivalenzklassen über die Höhen hinweg lässt sich durch den ihnen zugeordneten Nummern nachverfolgen. Höhere Auflösung unter Link {6}.

Prüft man hingegen mit Schleifen, welche das kartesische Produkt realisieren, ob die sich dabei ergebenden Punkte Quadrikpunkte sind oder nicht, hat man zwar über verschiedene Höhen hinweg immer die gleiche Reihenfolge durch die Schleifen gegeben, jedoch springen die Äquivalenzklassen über die Höhen hinweg. Sie ändern also ihre Position im Zahlengitter. Somit müsste man nun wieder über Schleifen prüfen, welcher der Punkte zu einer Höhe durch skalare Multiplikation aus einem Punkt zu einer anderen Höhe hervorgegangen ist. Dieses Vorgehen ist was die Rechenzeit angeht äußerst ineffizient und umständlich und kann durch Ausnutzung von $\hat{x} \equiv \lambda \cdot \hat{x}$ vermieden werden.

Nun wurde über eine ganze Seite hinweg der scheinbar triviale Sachverhalt, dass die Lösungen einer Höhe berechnet werden können, indem die Lösungen einer anderen Höhe auf die jeweilige Höhe skaliert werden, breitgetreten. Dies wurde getan, da es mit Plots der Quadrik über dem Körper $\mathbb{K}_p$ völlig kontraintuitiv ist, dass es i.d.T. funktioniert. Aber insbesondere wurde es getan, um hervor zu heben, dass sich der Körper $\mathbb{K}_p$ im Prinzip analog zu $\mathbb{R}$ bzgl. der Quadrik verhält. Denn $\mathbb{K}_p$ ist wie $\mathbb{R}$ bzgl. der Lösungen der Quadrik vollständig (vgl. Abbildung 11). Dabei ist des Pudels Kern dieser Behauptung in den Gleichungen (5.3) & (5.4) zu finden. Kann man also zeigen, dass diese $p-1$ Lösungen einzigartig sind, so folgt automatisch, dass sie für die verbleibenden $(p-1)/2-1$ Höhen ebenfalls einzigartig sind. Denn sie ergeben sich jeweils aus der Multiplikation mit einem Skalar $x'_d \in (1\,;\,(p-1)/2] \subset \mathbb{K}_p$. Somit kann der $\mathbb{K}_p^{d=2}$, bis auf den Lichtkegel, vollständig mit den Quadrikpunkten zu allen Höhen abgedeckt werden. Dabei durchlaufen die $(p-1)$ einzigartigen Zahlen-Tupel zu einer Höhe jeweils die Zyklische Achse. Dies wird insbesondere anschaulich ersichtlich, wenn man in Abbildung 12 die Plots zu den Höhen 5 und -5 miteinander vergleicht. Denn auf der Höhe 5 ist die 0-te Äquivalenzklasse in der oberen Hälfte des rechten Lichtkegel-Quadranten und auf der Höhe -5 ist sie in der unteren Hälfte des linken Lichtkegel-Quadranten. Hierbei wird außerdem das Geradenverhalten und somit die in Korollar 2.2 erwähnte Disjunktheit der Äquivalenzklassen ersichtlich. Denn alle Punkte erfahren beim Übergang von der Höhe 5 nach -5 eine Punktspiegelung bzgl. dem Standardcenter. Von diesem Verhalten kann man sich für einige p für alle Höhen unter dem Link {6} überzeugen. Damit sollte man an dieser Stelle zwischen einer Linie und einer Geraden im Kontext der finiten projektiven Geometrie klar unterscheiden. Denn eine Linie wurde in Definition 2.6 des projektiven Raums, als eine Ansammlung von mindestens drei miteinander inzidierenden Punkten definiert.

Definition 5.1 (Gerade per Punktspiegelung)**.** Eine Linie heißt Gerade g, wenn:
für all ihre Punkte für je zwei Punkte gilt, dass der eine $\vec{x}'$ aus dem anderen $\vec{x}$ aus einer Punktspiegelung bezüglich dem Punkt der dazwischen liegt $\vec{x}_c$ hervorgeht.
D.h.:[21] $(\forall\, \vec{x}, \vec{x}_c \in g)\ 2\vec{x}_c - \vec{x} = \vec{x}' \Rightarrow \vec{x}' \in g$

Mit dieser Auffassung einer Geraden verhält sich $\mathbb{K}_p$ i.d.T. wie $\mathbb{R}$ bzgl. der Lösungen der Minkowski-Quadrik, obwohl in $\mathbb{K}_p$ die Geraden über die Höhen hinweg umher springen. Denn in einem gewissen, durch p beschränkten endlichen Raumbereich, ist $\mathbb{K}_p$ wie $\mathbb{R}$ vollständig bzgl. der Anzahl der Lösungen der Minkowski-Quadrik. Weiter sind es in $\mathbb{R}$ die unendlich dichten geradlinigen Linien die einen gewissen zwei dimensionalen Raumbereich von oben betrachtet vollständig mit vier Dreiecken ausfüllen. Während es in $\mathbb{K}_p$ die umher springenden Linien sind. Diese Äquivalenzklassen sind auch in $\mathbb{K}_p$ Geraden im Sinne der Definition 5.1. Denn einerseits kann man sich anschaulich davon überzeugen, wenn man in Abbildung 12 eine beliebige der nummerierten Äquivalenzklassen aussucht, ihre Koordinaten zu einer Höhe x_d abliest und anschließend die Koordinaten der gleichen

[21] Diese Formel ergibt sich, wenn man den Koordinatenabstand von $\vec{x}$ bzgl. $\vec{x}_c$ betrachtet und diesen zu den Koordinaten von $\vec{x}_c$ addiert, also: $(\vec{x}\,')_i = (\vec{x}_c\,)_i + [(\vec{x}_c\,)_i - (\vec{x}\,)_i]$ (vgl. dazu Abbildung 13.)

Klasse auf der nächst höheren Höhe $x_{c,d} = x_d + 1$ abliest und diese als das Spiegelzentrum auffasst. Anschließend wendet man die Definition 5.1 einer Geraden an und erhält damit die Koordinaten der ausgesuchten Äquivalenzklasse auf der Höhe $x'_d = x_d + 2$, wobei modulare Rechenoperationen auszuführen sind. Andererseits kann man sich davon mit folgendem Beweis überzeugen.

Es sei die Quadrik $\hat{Q}_0^{\pm}$ aus Gleichung (2.7) gegeben und $g^2 := \pm g_{\pm}^2$. Weiter seien:

$$\hat{x} = [\vec{x}\,,\, x_d]^T \in \hat{Q}_0^{\pm}\big|_{x_d} \iff -g^2 x_d^2 = \vec{x}^{\,2} \tag{5.6}$$

$$\hat{x}_c = [\vec{x}_c\,,\, x_{c,d} = x_d + 1]^T \in \hat{Q}_0^{\pm}\big|_{x_{c,d}} \iff -g^2 x_{c,d}^2 = \vec{x}_c^{\,2}. \tag{5.7}$$

Die Behauptung ist, dass:

$$\hat{x}\,' = [\vec{x}\,', x'_d]^T \in \hat{Q}_0^{\pm}\big|_{x'_d} \iff, \text{ mit}$$
$$\vec{x}\,' = 2\vec{x}_c - \vec{x} \text{ und } x'_d = x_d + 2.$$

Also das je drei Lösungen zu drei Höhen auf einer Geraden liegen.
Das heißt es müsste folgendes wahr sein:

$$\begin{aligned} \iff -\, g^2 x_d'^{\,2} &= \vec{x}\,'^{\,2} \\ -g^2(x_d + 2)^2 &= (2\vec{x}_c - \vec{x})^2 \end{aligned}$$

Ausnutzung von Gleichungen (5.6) & (5.7) auf der rechten Seite ergibt:

$$-\, g^2 x_d^2 - 4g^2 - 4g^2 x_d = -4g^2 x_{c,d}^2 - g^2 x_d^2 - 4\vec{x}_c \cdot \vec{x}$$

Kürzen & $\big| \cdot (-1/4)$ liefert weiter:

$$\begin{aligned} g^2 + g^2 x_d &= g^2 x_{c,d}^2 + \vec{x}_c \cdot \vec{x} \\ \vec{x}_c \cdot \vec{x} &= g^2(1 + x_d) - g^2 x_{c,d}^2 = g^2 x_{c,d} - g^2 x_{c,d}^2 = \\ &= g^2 x_{c,d}(1 - x_{c,d}) = g^2 x_{c,d}(1 - x_d - 1) = \\ &= -g^2 x_d x_{c,d} \\ -g^2 x_d x_{c,d} &= -x_0 x_{c,0} + x_1 x_{c,1} + \ \dots\ + x_{d-1} x_{c,d-1} \end{aligned}$$

Weiter werden mit $\big| \cdot 1/x_{c,d}$ die Koordinaten $x_{c,i}$ auf die Höhe 1 normiert und mit $\big| \cdot x_d$ werden sie auf die Höhe x_d skaliert (vgl. dazu Abbildung 13). Somit folgt:

$$-g^2 x_d^2 = -x_0^2 + x_1^2 + \ \dots\ + x_{d-1}^2 = \vec{x}^{\,2} \qquad \square$$

Damit führen die Geraden sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{K}_p$ zu einer Vollständigkeit bzgl. der Lösungen. Warum es sich Lohnen könnte, diese Vollständigkeit von $\mathbb{K}_p$ bzgl. der Quadrik-Punkte mathematisch fundiert zu Begründen, zeigt sich in Abschnitt 6.

Um diese zu $\mathbb{R}$ analoge Vollständigkeit bzgl. der Quadrik von $\mathbb{K}_p$ abschließend zu untermauern, soll ein Vergleich zwischen $\mathbb{K}_p$, $\mathbb{Z}_{z_0}$ und $\mathbb{Q}_{z_0}$ erfolgen. Dabei stellt

$$\mathbb{Z}_{z_0} := \left\{ -z_0,\ \dots,\ 0,\ \dots,\ z_0 \,\middle|\, z_0 = \lfloor \sqrt{(p-1)/2} \rfloor \right\} \tag{5.8}$$

eine $\mathbb{Z}$ Näherung dar (vgl. [17]), in der wie in $\mathbb{Z}$ üblich auf modulare Rechenoperationen verzichtet werden kann. Denn für in diesem durch $\mathbb{Z}_{z_0}$ definierten Bereich verhält sich der Körper $\mathbb{K}_p$ bzgl. den Rechenoperationen wie $\mathbb{Z}$. Weiter soll zu illustrativen Zwecken:

$$\mathbb{Q}_{z_0} := \left\{ q = \frac{Z}{N} \mid Z, N \in \mathbb{Z}_{z_0} \right\} \tag{5.9}$$

dienen und dabei endlich sein und mit ihm auch auf modulare Rechenoperationen verzichtet werden. In den über diesen Zahlenfeldern entstandenen Abbildungen 14 links und rechts wurden alle Höhenlösungen in einer Ebene dargestellt. Somit kann man ihnen entnehmen, dass mit der Wahl dieser Felder "viele" Lösungen abgeschnitten wurden, verglichen mit Bildern, die sich für $\mathbb{K}_p$ bzw. $\mathbb{R}$ ergeben. Weiter sieht man, wie sich nicht springende Geraden anfangen zu bilden. Insbesondere bei der Hinzunahme von rationale Zahlen.

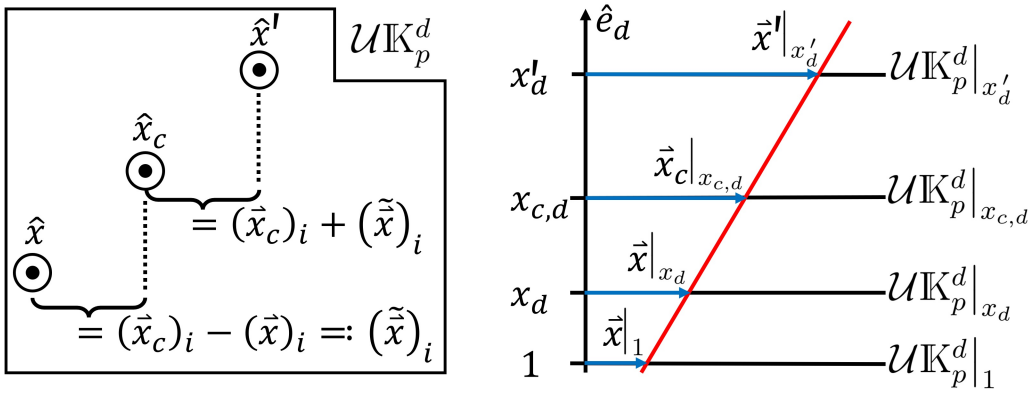


Abbildung 13: Links: Zur Punktspiegelung. Die Punkte auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$, welcher auf abstrakte Weise als Zeichenebene dargestellt wird, wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Rechts: Zur Höhenskalierung. Die Linien zu den verschiedenen Höhen sind auf abstrakte Weise stellvertretend für den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ zu verstehen. Die sich über $\mathbb{K}_p$ ergebende Gerade sieht nicht wie hier dargestellt geradlinig aus (vgl. Abbildung 12). Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint.

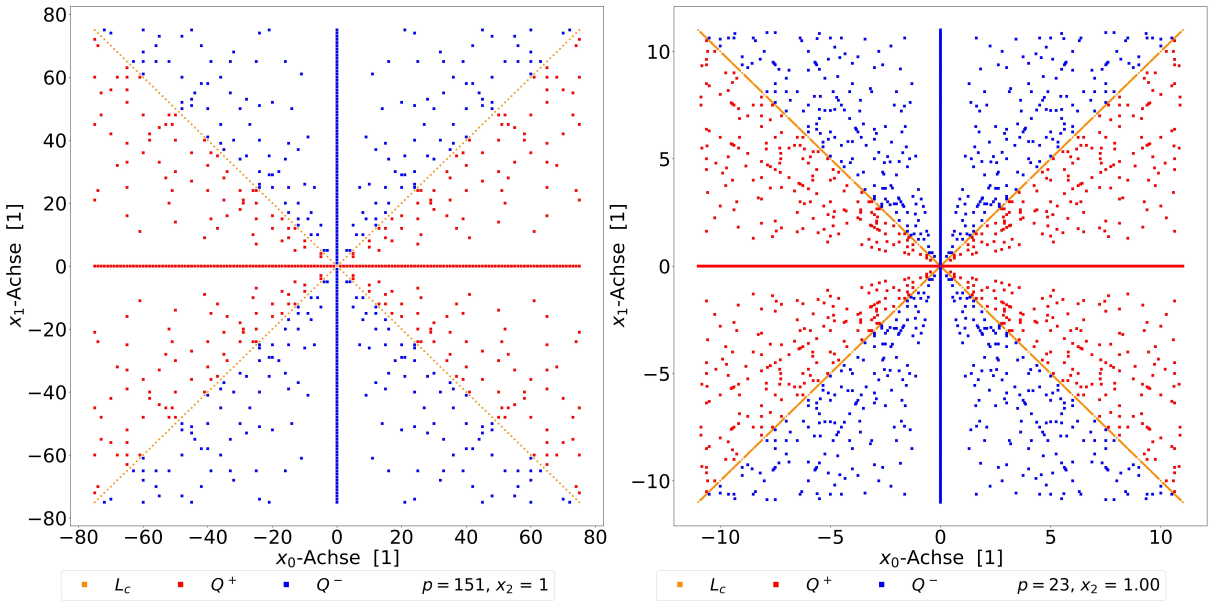


Abbildung 14: Minkowski-Quadrik $Q_0^{\pm}$, Lichtkegel L_c. Lösungen aller Höhen in einer Ebene dargestellt, über links: $\mathbb{Z}_{z_0}$ und rechts: $\mathbb{Q}_{z_0}$. Höhere Auflösung unter Link {7}.

6. Harmonischer Oszillator

Der dynamische Constraint aus Definition 3.5 soll nun genutzt werden, um die Trajektorie eines harmonischen Oszillators in einer flachen Raumzeit, im Rahmen der finiten projektiven Geometrie, zu konstruieren.

Für den harmonischen Oszillator aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass er durch die Gleichung $\vec{F}_{klas.} = -k\,\vec{r}$ beschreibbar ist. Weiter lässt sich nach der SRT die Vierkraft $\vec{K}$ schreiben als:

$$\vec{K}_\tau = \gamma_\tau^4 \begin{pmatrix} \vec{v}_\tau \cdot \vec{F}_{klas.,\tau} \\ \vec{v}_\tau(\vec{v}_\tau \cdot \vec{F}_{klas.,\tau}) + \gamma^{-2}\vec{F}_{klas.,\tau} \end{pmatrix} = -k\gamma_\tau^4 \begin{pmatrix} \vec{v}_\tau \cdot \vec{r}_\tau \\ \vec{v}_\tau(\vec{v}_\tau \cdot \vec{r}_\tau) + \gamma^{-2}\vec{r}_\tau \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

wobei nach τ parametrisiert wurde und im letzten Schritt die Gleichung des harmonischen Oszillator verwendet wurde. Weiter ist $\vec{r}_\tau$ der momentane räumliche Ort des oszillierenden Massenpunkts und $\vec{v}_\tau$ bezeichnet seine räumliche Geschwindigkeit. Somit ergibt sich für die projektive Beschleunigung mit $d = 2$:

$$\hat{a}_\tau = \hat{S}_{m^{-1}}\hat{K}_\tau = \begin{bmatrix} -k\gamma_{\tau-1}^4/m \begin{pmatrix} u_{1,\tau-1}x_{1,\tau} \\ x_{1,\tau} \end{pmatrix} \\ a_{d=2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -k\gamma_{\tau-1}^4 \begin{pmatrix} u_{1,\tau-1}x_{1,\tau} \\ x_{1,\tau} \end{pmatrix} \\ m\,a_{d=2} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \vec{a}_\tau \\ x_{d=2} \end{bmatrix},$$

wobei $\hat{S}_{m^{-1}} = [\,\mathrm{diag}(m\mathbb{1}_{d=2}\,,\,1)\,]^{-1}$ einen Streckungsoperator auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^{d=2}$ darstellt und die $\tau-1$-te-Geschwindigkeit im τ-ten-Punkt zu verwenden ist (vgl. Abbildung 15). Wie zum dynamischen Constraint erläutert, wird eine Geschwindigkeitsänderung auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ im Punkt $\hat{x}_\tau$ dadurch realisiert, dass die bzgl. diesem Punkt verschobene Quadrik verwendet werden muss und das durch den dynamischen Constraint gefordert wird, dass die zu τ vorher und nachher Geschwindigkeiten auf dieser verschobenen Quadrik liegen sollen. D.h. es ist die Quadrik zum verschobenen Center:

$$\hat{c}_\tau = \hat{x}_\tau \oplus \hat{a}_\tau = [\,x_d\vec{x}_\tau + \vec{a}_\tau x_d\,,\,x_d^2\,]^T \equiv [\,\vec{x}_\tau + \vec{a}_\tau\,,\,x_d\,]^T \tag{6.2}$$

zu verwenden. Man rechnet also die Quadrik, wobei $g^2 := +g_+^2$, zu diesem Center aus:

$$\hat{Q}_{\hat{c}_\tau}^+ = \hat{T}_{-\hat{c}_\tau}^T \hat{Q}_0^+ \hat{T}_{-\hat{c}_\tau} = \begin{bmatrix} x_d\mathbb{1}_d & \vec{0} \\ -\vec{c}_\tau^T & x_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d\eta_d & -\eta_d\vec{c}_\tau \\ \vec{0}^T & g^2x_d \end{bmatrix} = \tag{6.3}$$

$$= \begin{bmatrix} x_d^2\eta_d & -x_d\eta_d\vec{c}_\tau \\ -x_d(\eta_d\vec{c}_\tau)^T & \vec{c}_\tau^2 + g^2x_d^2 \end{bmatrix} \overset{d=4}{\equiv} \begin{bmatrix} -x_d^2 & 0 & 0 & 0 & x_dc_{0,\tau} \\ 0 & x_d^2 & 0 & 0 & -x_dc_{1,\tau} \\ 0 & 0 & x_d^2 & 0 & -x_dc_{2,\tau} \\ 0 & 0 & 0 & x_d^2 & -x_dc_{3,\tau} \\ x_dc_{0,\tau} & -x_dc_{1,\tau} & -x_dc_{2,\tau} & -x_dc_{3,\tau} & \vec{c}_\tau^2 + g^2x_d^2 \end{bmatrix}_{d=4}$$

Das die Geschwindigkeiten zum jeweiligen τ auf der Quadrik liegen sollen, ist gleichbedeutend damit, dass die Punkte vorher und nachher bzgl. dem jeweiligen τ Quadrikpunkte sein sollen. Somit berechnet man:

$$
\begin{aligned}
0 = \hat{x}_{\tau\pm1}^T \hat{Q}_{\hat{c}_\tau}^+ \hat{x}_{\tau\pm1} &= \begin{bmatrix} \vec{x} \\ x_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_d^2 \eta_d \vec{x}_{\tau\pm1} & -x_d^2 \eta_d \vec{c}_\tau \\ -\vec{x}_{\tau\pm1} \cdot \vec{c}_\tau & (\vec{c}_\tau^2 + g^2 x_d^2) x_d \end{bmatrix} = \\
&= x_d^2 \vec{x}_{\tau\pm1}^2 - 2 x_d^2 \vec{x}_{\tau\pm1} \cdot \vec{c}_\tau + x_d^2 \vec{c}_\tau^2 + g^2 x_d^4 \equiv \\
&\equiv (\vec{x}_{\tau\pm1} - \vec{c}_\tau)^2 + g^2 x_d^2 \,. \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

Um nun ein Programm schreiben zu können, welches nummerisch iterativ den dynamischen Constraint löst und somit sukzessiv eine Menge von Punkten erstellt, welche die Trajektorie bilden, wurde die Abbildung 15 erstellt. Sie stellt nur eine Stütze dar, um das Prinzip des dynamischen Constraint formeltechnisch für ein paar τ-Schritte zu erfassen und erhebt somit keinen Anspruch darauf, dass sich genau dieses Bild bei der Trajektorie-Konstruktion ergibt, was sich aber nicht auf die Umsetzung des zugrundeliegenden Prinzips auswirkt. Die Zeichenebene steht stellvertretend für den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ und sein Standardcenter kann relativ zu der Zeichnung irgendwo liegen.

Beim erstellen dieser Zeichnung kam der Gedanke auf, dass die Punkte $\hat{x}_\tau$ und $\hat{x}'_\tau$ oder $\hat{x}_{\tau+1}$ und $\hat{x}'_{\tau+1}$ nicht notwendigerweise von vornherein identisch sein müssen. Um dies nummerisch analysieren zu können, muss zunächst im folgenden Absatz die Konsequenz diskutiert werden.

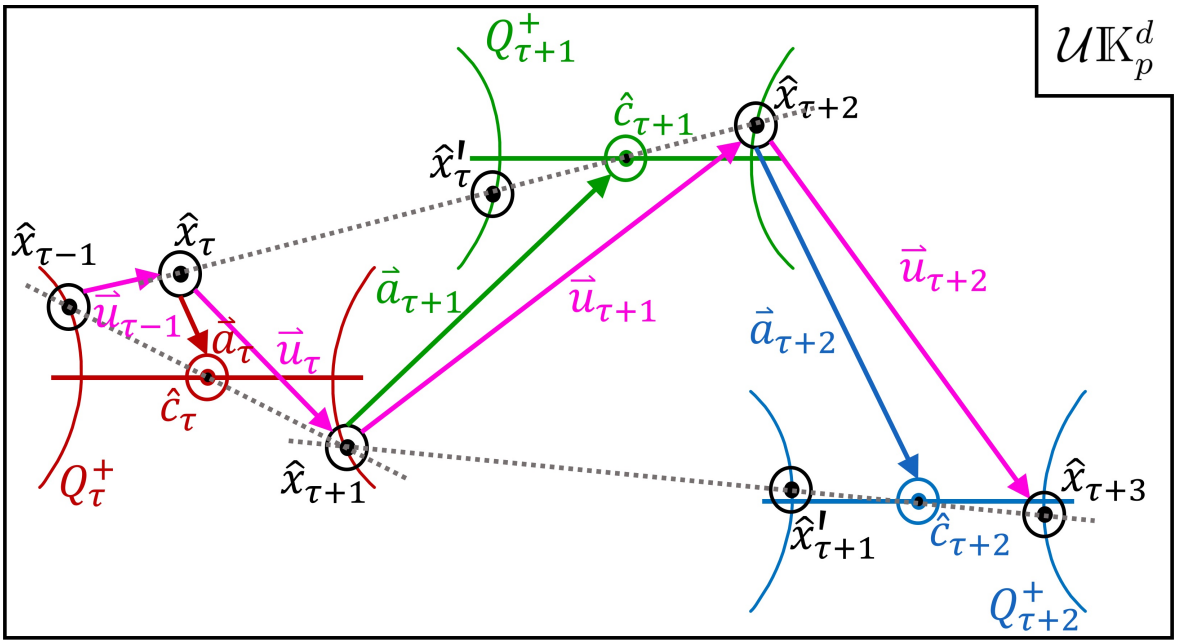


Abbildung 15: Zur Erfassung des dynamischen Constraint für ein nummerisch iteratives Programm. Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint.

Zunächst überzeugt man sich, dass der Graph der Lösungsmenge der Quadrik punktsymmertrisch bzgl. des aktuellen Centers ist, also dass $-q(-(\hat{x}_{\tau\pm1} - \hat{c}_\tau)) \equiv q(-(\hat{x}_{\tau\pm1} - \hat{c}_\tau)) =$

$(-(\vec{x}_{\tau\pm1} - \vec{c}_\tau))^2 + g^2(-x_d)^2 = q(\hat{x}_{\tau\pm1} - \hat{c}_\tau)$ gilt. Damit kann wie folgt argumentiert werden. Seien die Punkte $\hat{x}_{\tau-1}$, $\hat{x}_{\tau+1} \in Q^+_\tau$ gegeben und sei $\hat{x}_\tau \equiv \hat{x}'_\tau \in Q^+_{\tau+1}$ gegeben. Dann folgt sofort, wegen Punktsymmetrie bzgl. $\hat{c}_{\tau+1}$, dass $\hat{x}_{\tau+2}$ auch auf $Q^+_{\tau+1}$ liegt. Wenn man nun $\hat{x}_{\tau+3}$ konstruieren möchte, wobei $\hat{u}_{\tau+1}, \hat{u}_{\tau+2} \in Q^+_{\tau+2}$ wegen des dynamischen Constraint sein müssen, dann müsste $\hat{x}_{\tau+1} \equiv \hat{x}'_{\tau+1} \in Q^+_{\tau+2}$ sein. Denn wenn $\hat{x}_{\tau+1} \neq \hat{x}'_{\tau+1}$ wäre, dann wäre zwar per Startkonstruktion der dynamische Constraint für $\tau + 1$ erfüllt, da $\hat{u}_\tau, \hat{u}_{\tau+1} \in Q^+_{\tau+1}$ sind, aber für $\tau + 2$ wäre er nicht erfüllt. Denn für $\hat{x}_{\tau+1} \neq \hat{x}'_{\tau+1}$ würde nur $\hat{u}_{\tau+2} \in Q^+_{\tau+2}$ sein, aber $\hat{u}_{\tau+1} \notin Q^+_{\tau+2}$ sein, da wie behauptet, nicht notwendigerweise von vornherein $\hat{x}_{\tau+1} \equiv \hat{x}'_{\tau+1}$ gelten muss. Man hätte also zwei Geschwindigkeiten $\hat{u}_{\tau+1} \in Q^+_{\tau+1}$ und $\hat{u}'_{\tau+1} \in Q^+_{\tau+2}$. Das verbietet aber der dynamische Constraint, denn er fordert, dass $\hat{u}_{\tau+1} \equiv \hat{u}'_{\tau+1} \in (Q^+_{\tau+1} \wedge Q^+_{\tau+2})$ sein muss, also dass $\hat{x}_{\tau+1} \equiv \hat{x}'_{\tau+1}$ sichergestellt werden muss, da er $\forall\, \tau$ zu erfüllen ist.

Geht man aber zunächst einmal davon aus, dass die Deckungsgleichheit von $\hat{x}_{\tau+1}$ und $\hat{x}'_{\tau+1}$ nicht von vornherein sichergestellt ist, dann stellt sich die Frage, wie soll das $(\forall\, \tau)$ erreicht werden. An den Punkten $\hat{x}_\tau$ und damit an den projektiven Geschwindigkeiten $\hat{u}_\tau$ und Beschleunigungen $\hat{a}_\tau$ kann man nicht von außen eingreifen, da sie sich aus dem dynamischen Constraint auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$ heraus entwickeln lassen müssen. Somit sind die Positionen der Center $\hat{c}_\tau = [\,\vec{x}_\tau + \vec{a}_\tau\,,\, x_d\,]^T$ auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$ ebenfalls unantastbar. Blickt man nun auf Gleichung (6.3), so stellt man fest, dass noch nur die Parameter x_d^2 und g^2 übrig bleiben.

Der reelle Zahlenkörper wird nun vorübergehend als Abhilfe herangezogen, um anschaulich argumentieren zu können. Mit g^2 als Koeffizient vor dem x_d^2 in Gleichung (6.4) bewirkt man, dass die Hyperbelpaare in Abbildung 15 näher an das jeweilige Center heranrücken oder von ihm auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$ weg geschoben werden. Lässt man nun g fest und verändert die Höhe x_d, hat dies den selben Effekt bzgl. der Hyperbelpaare. Dieser Effekt ist genau das, was benötigt wird, falls sich i.d.T. $\hat{x}_{\tau+1} \neq \hat{x}'_{\tau+1}$ herausstellen sollte. Hier mit Hyperbelpaaren zu argumentieren ist zulässig, da für physikalisch sinnvolle Resultate nach Gleichung (4.9) die positive Quadrik Q^+ für Berechnungen zu wählen ist und die positive Quadrik äußert sich in Dimensionen $d > 2$ ebenfalls als Hyperbelpaar auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$. Man vergleiche dazu Abbildung A.1 und Gleichung (A.2) im Anhang A (wobei die negative Quadrik für die Längenfestlegung der übrigen $d - 1$ Achsen dient). Hier mit Bildern der Quadrik aus dem Reellen, also mit Hyperbelpaaren zu argumentieren, ändert nichts daran, dass nur x_d oder g als Stellschrauben übrig bleiben, um die Gleichheit von $\hat{x}_{\tau+1}$ und $\hat{x}'_{\tau+1}$ zu gewährleisten. Denn in $\mathbb{R}$ streckt man mit g bzw. x_d, welche Elemente eines kontinuierlichen Zahlenstrahls sind, die Hyperbelpaare also $Q^+_{\tau+2}$ exakt so auf, dass das bereits gegebene und fixierte $\hat{x}_{\tau+1} \in Q^+_{\tau+1}$ auch zu einem Element aus $Q^+_{\tau+2}$ wird. Denn dann wäre sichergestellt, dass $\hat{u}_{\tau+1} \equiv \hat{u}'_{\tau+1} \in (Q^+_{\tau+1} \wedge Q^+_{\tau+2})$ ist. Es stellt sich also die Frage, wie dies auf einem finiten Körper $\mathbb{K}_p$ der keine kontinuierlichen Hyperbelpaare aufweist ebenfalls gewährleistet wird.

Hier kommt die in Abschnitt 5 aufgezeigte zu $\mathbb{R}$ analoge Vollständigkeit von $\mathbb{K}_p$ bezüglich der Minkowski-Quadrik ins Spiel. Denn in $\mathbb{K}_p$ ist Q^+_τ für jede Höhe $x_d \in [1\,;\,(p-1)/2] =: H_p$ mit genau einem Muster von Punkten verknüpft (vgl. Abbildung 11). Man beginne mit einer Startkonstruktion, wie zum Beginn dieser Seite, auf der Höhe x_d. Dann hat man ein Muster $Q^+_0\big|_{x_d}$ gegeben. Diese Quadrik wird dann mit dem Verlauf von τ zum jeweiligen Center $\hat{c}_\tau$ auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$ verschoben. Nun tritt wie behauptet das Problem auf, dass das bereits gegebene und fixierte $\hat{x}_{\tau+1} \notin Q^+_{\tau+2}\big|_{x_d}$ sein wird. Wenn das so ist, dann durchläuft man nun alle Höhen $x'_d \in H_p \setminus \{x_d\}$ und sucht nach dem Muster, das von "oben" betrachtet einen Lösungspunkt $\hat{x}'_{\tau+1}$ der Quadrik $Q^+_{\tau+2}\big|_{x'_d}$ hat, der Deckungsgleich

mit $\hat{x}_{\tau+1}$ ist (vgl. Abb. 16 links). Dieser zum gegebenen $\hat{x}_{\tau+1}$ deckungsgleiche Punkt $\hat{x}'_{\tau+1}$ sollte wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}_p$ bezüglich der Minkowski-Quadrik immer auffindbar sein. Mit der Quadrik $Q^+_{\tau+2}\big|_{x'_d}$ zu der Höhe x'_d, die $\hat{x}_{\tau+1} \equiv \hat{x}'_{\tau+1}$ sicherstellt, ist dann die notwendige Symmetrie für eine Punktspiegelung gegeben. Man erhält somit $\hat{x}_{\tau+3}$. Mit einem hierzu analogen Vorgehen für alle weiteren τ hat man gewährleistet, dass der dynamische Constraint für all diese verbleibenden τ eindeutig erfüllt sein wird.

Problematisch bei dieser Argumentation ist jedoch, dass sich diese Vollständigkeit von $\mathbb{K}_p$ bzgl. der Quadrik auf die plus und minus Quadrik bezogen hat. Ob nur die plus Quadrik dennoch ausreichend ist, müsste man ebenfalls noch zeigen. Die Vermutung ist, das es i.d.T. so ist, denn wie mit Abbildung 11 rechts ersichtlich, ist Q^+_0 vollständig bzgl. der Lösungen in den Bereichen, in denen es Q^+_0 auch in $\mathbb{R}$ ist. Das soll heißen, dass die zeitartigen Lichtkegel - linker und rechter in der Abbildung 11 - vollständig mit Q^+_0 Lösungen überlappungsfrei ausgefüllt werden können, also das die Anzahl der Q^+ Lösungen ausreichend sein sollte, obwohl $\mathbb{K}_p$ im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ endlich ist. Weiter sei hierzu noch erwähnt, dass wenn p groß genug gewählt ist, sodass eine über den ganzen Raum hinweg ausgedehnte Trajektorie hineinpasst, automatisch auch $(p-1)/2$ größer ist, als der "Abstand" von $\hat{c}_\tau$ und $\hat{c}_{\tau+2}$ (vgl. Abbildung 16 links). Denn sonst würde man ein Muster von Punkten der Abmaße $(p-1)/2$ bzgl. dem jeweiligen Center haben und $\hat{x}_{\tau+1}$ würde außerhalb davon liegen während $\hat{x}'_{\tau+1}$ innerhalb liegt und man würde vergeblich nach Deckungsgleicheit suchen (vgl. Abbildung 16 rechts).

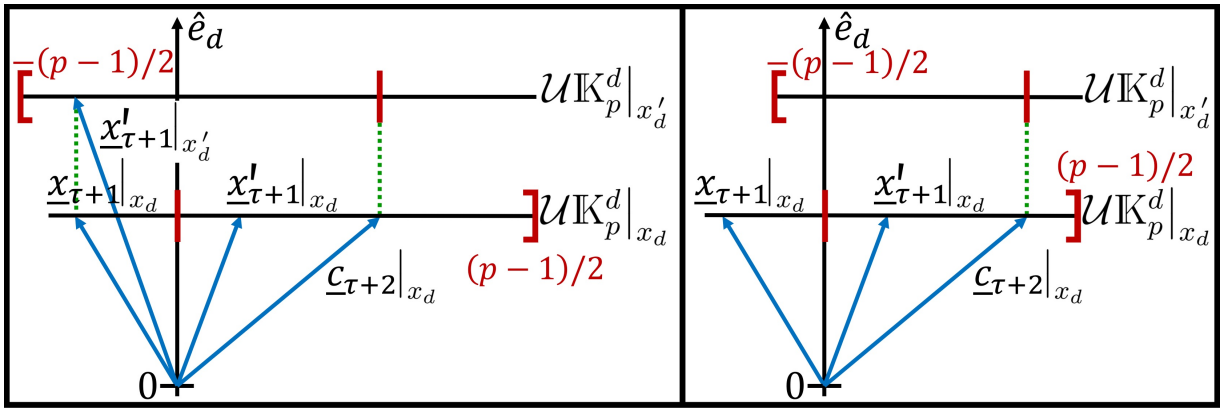


Abbildung 16: Zur Deckungsgleichheit von Quadrikpunkten von zu einander verschobenen Quadriken. Darstellung des $\mathbb{K}_p$, wobei die Linien zu den verschiedenen Höhen auf abstrakte Weise stellvertretend für den $\mathcal{U}\mathbb{K}^d_p$ zu verstehen sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint.

Um nun heraus zu finden, ob i.d.T. $\hat{x}_{\tau+1} \equiv \hat{x}'_{\tau+1}$ nicht von vornherein gegeben ist, wird wie folgt vorgegangen. Man nimmt an, dass es nicht von vornherein gegeben ist, d.h., das:

$$(gx_d)^2 = (gx_d)^2_{\tau+1} = -(\vec{x}^2_\tau - 2\vec{x}_\tau \cdot \vec{c}_{\tau+1} + \vec{c}^2_{\tau+1}) \neq const. \tag{6.5}$$

angenommen wird. Dabei ist dieser Ausdruck zu Gleichung (6.4) äquivalent, bis auf die τ-Abhängigkeit. Dabei ist $(gx_d)^2_{\tau+1}$ so zu verstehen, dass nur einer der beiden Parameter letztlich für die Aufstreckung der Hyperbeln zuständig ist. Der Ausdruck wurde aber so notiert, da prinzipiell beide dazu in der Lage sind. Weiter betrachte man folgende Argumentation mit der Abbildung 17.

Argumentation zur Gewährleistung des dynamischen Constraint

1. Per Startkonstuktion sei $\hat{x}_{\tau-1}, \hat{x}_{\tau+1} \in Q_\tau^+$ und $\hat{x}_\tau$ gegeben.
   Aus $\hat{x}_{\tau+1}$ folgt $\hat{c}_{\tau+1}$ und damit $Q_{\tau+1}^+$.

2. Man führe nun eine Punktspiegelung vom gegebenen $\hat{x}_\tau$ am gegebenen $\hat{c}_{\tau+1}$ aus.
   Damit erhält man $\hat{x}_{\tau+2}$.

   2.1 Wenn nun $\hat{x}_\tau$ von vornherein *nicht* mit $\hat{x}'_\tau$ deckungsgleich ist, dann hätte man zuvor mit $(gx_d)^2_{\tau+1}$ aus Gleichung (6.5) die Hyperbelpaare aufstrecken müssen, sodass der linke Hyperbelast von $Q_{\tau+1}^+$ einen mit dem gegebenen festen $\hat{x}_\tau$ deckungsgleichen Punkt aufweist. Denn erst dann hat man die nötige Punktsymmetrie von $\hat{x}_\tau$ und $\hat{x}_{\tau+2}$ bzgl. $\hat{c}_{\tau+1}$, sodass der dynamische Constraint erfüllt ist. Also das $\hat{u}_\tau \equiv \hat{u}'_\tau \in Q_{\tau+1}^+$ ist und wegen der dann gewährleisteten Punktsymmetrie von $\hat{x}_\tau$ und $\hat{x}_{\tau+2}$ bzgl. $\hat{c}_{\tau+1}$ ist auch $\hat{u}_{\tau+1} \in Q_{\tau+1}^+$.

   2.2 Wenn nun $\hat{x}_\tau$ von vornherein mit $\hat{x}'_\tau$ deckungsgleich ist, dann ist es nicht nötig die Hyperbelpaare von $Q_{\tau+1}^+$ entlang des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ zum Center $\hat{c}_{\tau+1}$ hin oder von ihm weg zu strecken. Denn die Hyperbelpaare liegen schon so wie sie es sollen, damit man $\hat{x}_\tau$ an $\hat{c}_{\tau+1}$ punktspiegeln darf, damit man $\hat{x}_{\tau+2}$ erhält.

Korollar 6.1. Die Punktspiegelungsmethode und damit die Verwendung der Definition 5.1 einer Geraden impliziert, dass

> bei der iterativen Konstruktion einer Trajektorie, welche dem Prinzip des dynamischen Constraint unterliegen soll, dieser $\forall\, \tau$ sichergestellt sein wird.

Denn sie ist unabhängig davon, ob die Hyperbeln aufgestreckt werden müssen oder nicht. Beweis: 2.1 und 2.2 der Argumentation zur Gewährleistung des dynamischen Constraint (vgl. den algebraischen Beweis D im Anhang D, der erst zum Ende der Arbeit gefunden wurde).

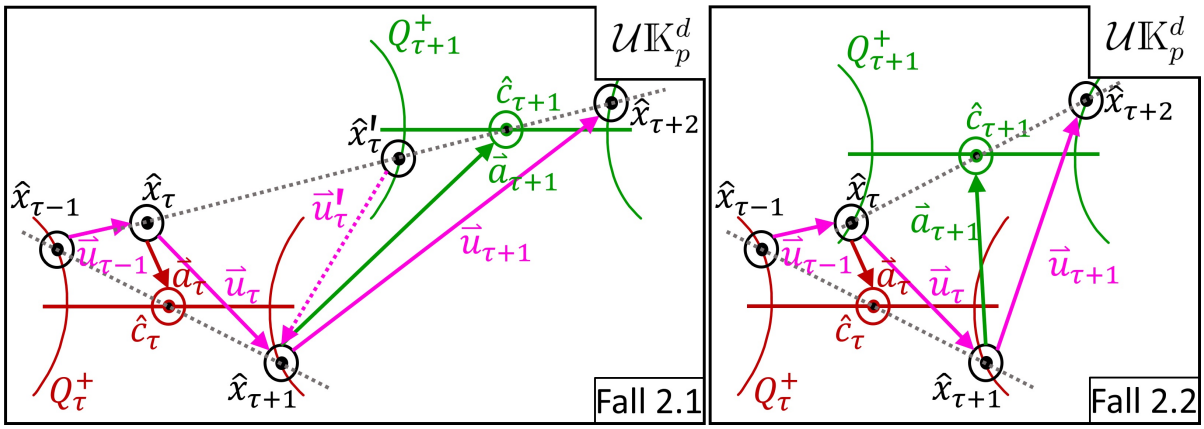


Abbildung 17: Zur Gewährleistung des dynamischen Constraint für ein nummerisch iteratives Programm. Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint.

Mit Korollar 6.1 kann also nummerisch iterativ eine Trajektorie konstruiert werden, die dem Prinzip des dynamischen Constraint folgt, ohne das dabei darauf geachtet werden muss, ob die Hyperbeln nun i.d.T. aufgestreckt werden müssen oder nicht. Die sich damit ergebenden Punkte der Trajektorie und jeweiligen Center können somit genutzt werden um anschließend $(\forall\,\tau)$ die Werte von $(gx_d)^2_\tau$ zu berechnen. Sollte sich für diese Werte $(gx_d)^2_\tau = const.$ $(\forall\,\tau)$ zeigen, so folgt daraus, dass die Quadriken zu den jeweiligen τ nicht aufgestreckt werden müssen. Sollte sich jedoch ein von τ abhängiger Verlauf ergeben, so folgt, dass i.d.T. im Allgemeinen $\hat{x}_\tau \neq \hat{x}'_\tau$ ist.

Zunächst soll diese Konstruktionsmethode in einem Makro-Limes erprobt werden, um zu sehen, ob sie das Resultat liefert, dass aus dem Reellen für den harmonischen Oszillator bekannt ist. Also eine periodische Funktion mit konstanter Amplitude und einem Zusammenhang zwischen der Federkonstanten k und der Winkelgeschwindigkeit ω. Denn über dem Körper $\mathbb{K}_p$ kann man nicht erwarten, einen solchen aus dem Reellen bekannten - der numerischen Begrenztheit geschuldeten - relativ kontinuierlichen Funktionsgraph zu erhalten. Insbesondere wenn man die umherspringenden Äquivalenzklassen des $\mathbb{K}_p$ bedenkt. Ein sich über dem Körper $\mathbb{K}_p$ ergebendes Resultat sollte man daher vielmehr als ein Resultat ansehen, das für kleine Skalen gilt. Ob und für welches Phänomen es genutzt werden kann, um Vorhersagen zu treffen, wird sich höchst wahrscheinlich nicht in dieser Arbeit klären lassen.

Wenn nun ein Makro-Limes für die Konstruktion einer Trajektorie mit dem dynamischen Constraint erprobt werden soll, dann ist also ein anderes Zahlenfeld, wie z.B. Z_{z_0} zu wählen. Aber dann muss bedacht werden, dass selbst für ein entsprechend gewähltes $(gx_d)^2_\tau$, sofern überhaupt notwendig, nicht notwendigerweise $\hat{x}_\tau$ mit einem der diskreten Punkte der linken Hyperbel zur Quadrik $Q^+_{\tau+1}$ in Abbildung 17 deckungsgleich ist. Denn wenn nicht $\mathbb{K}_p$ mit seiner Vollständigkeit bzgl. der Quadrik oder der tatsächlich vollkommen kontinuierliche reelle Zahlenraum zugrunde gelegt wird, werden keine - über alle Höhen hinweg - vollständigen Muster vorhanden sein oder es werden diskrete Hyperbeln vorliegen. Somit kann es sein, dass man bei einer, sofern überhaupt nötig, perfekt gestreckten Hyperbel, zwar das $\hat{x}_\tau$ per Startkonstruktion gegeben hat, aber in der Quadrik $Q^+_{\tau+1}$ selbst der deckungsgleiche Punkt $\hat{x}'_\tau$ gar nicht vorkommt, da sie ja nicht kontinuierlich oder vollständig bzgl. der Lösungen ist.

Korollar 6.2. Verwendung der Punktspiegelungsmethode zur Konstruktion der Trajektorie

> über Zahlenfeldern die nicht $\mathbb{K}_p$ oder $\mathbb{R}$ sind, impliziert, dass man so tut, als ob man $\mathbb{R}$ verwendet hätte um die Lösungen der Quadrik auszurechnen.

Beweis: Durch Verwendung der Punktspiegelungsmethode und damit durch Verwendung der Definition 5.1 einer Geraden wird sich aus einem per Startkonstruktion gegebenen $\hat{x}_\tau$ per Punktspiegelung an $\hat{c}_{\tau+1}$ immer ein $\hat{x}_{\tau+2}$ berechnen lassen, obwohl die Quadrik $Q^+_{\tau+1}$ selbst - über Zahlenfeldern die nicht $\mathbb{K}_p$ oder $\mathbb{R}$ sind - nicht notwendigerweise einen deckungsgleichen Partner zu $\hat{x}_\tau$ haben muss.

Allerdings ist mit Korollar 6.2 der Makro-Limes noch nicht vollständig. Da wie von Simon in [17] Abschnitt 6.1 gezeigt, bedarf es eines weiteren Elements, denn "will man [...] die Schwingung besser auflösen, die Zeitauflösung [...] aber nicht kleiner als 1 [sein kann], muss die Frequenz kleiner werden. Unter der Annahme, dass der Vorfaktor [k] der Kraft mit der Frequenz korreliert, muss der Vorfaktor also bruchwertig werden."

Mit diesen beiden Elementen, Punktspiegelungsmethode und einem $k := \frac{Z}{N}$, ist es gelungen den klassischen harmonischen Oszillator (HO) aus der finiten projektiven Geometrie heraus zu entwickeln, wobei er die Eigenschaften aufweist, die aus dem Reellen bekannt sind. Dabei wurde analog zu Abbildung 17, folgende Startkonstruktion gewählt. Dimension $d = 2$ und Zahlenfeld Z_{z_0}. Damit wurde die Quadrik zum Standardcenter auf der Höhe $x_2 = 24$ berechnet. Es wurde die Höhe 24 gewählt, da die Quadrik über Z_{z_0} zu dieser Höhe verglichen mit den anderen Höhen "schöne" diskrete Hyperbeln aufweist. Wobei mit Korollar 6.2 diese Startwahl und somit die Dichtheit der diskreten Hyperbeln irrelevant sein sollte. Weiter wurde für $\tau = 0$ o.B.d.A. $\hat{x}_0 = [\vec{0}, 24]^T$ gewählt und als Startauslenkung $\hat{x}_{-1} = [-25, 7, 24]^T \in Q_0^+\big|_{x_2=24}$. Da $\hat{x}_{-1}$ am Standardcenter gespiegelt wird und man damit $\hat{x}_1$ erhält, folgt für die Startgeschwindigkeit $\hat{u}_0 = \hat{x}_1 \ominus \hat{x}_0 = [25 - 0, -7 - 0, 24]^T$ und damit für die räumliche Geschwindigkeit $u_1 = -7$. Somit wählt man mit der Startauslenkung also mit $\hat{x}_{-1}$ eigentlich die Startgeschwindigkeit. Nach dieser Startkonstruktion wurden alle weiteren Punkte der Trajektorie iterativ durch eine Schleife berechnet, die über alle $\tau \in [0\,;\,\tau_{max}]$ loopt, wobei sie immer wieder die Punktspiegelungsmethode verwendet. Vgl. dazu den Quellcode des Python-Moduls, der mit dem Link, der im Literaturverzeichnis in der Quelle [29] hinterlegt ist, abrufbar ist. Die räumliche Komponente $(\hat{x})_1$ der sich mit diesem Verfahren ergebenden Punkte sind in Abbildung 18 über τ aufgetragen. Dabei einmal für $Z = 1,\ N = 10^3$ und einmal für $Z = 1,\ N = 10^5$. Weiter sind die räumlichen Geschwindigkeiten $(\hat{u})_1$, die sich auch mit diesem Verfahren ergeben haben, über τ in Abbildung 18 aufgetragen. Dabei einmal für $Z = 1,\ N = 10^3$ und einmal für $Z = 1,\ N = 10^5$. Weiter ist in diesen Abbildungen jeweils der Zahlenwert der Amplituden hinterlegt, welcher zustande gekommen ist, indem den iterativ erzeugten Daten die größten bzw. die kleinsten Werte entnommen wurden. Über all diese so entstanden Maxima bzw. Minima wurde jeweils gemittelt, was die in den Abbildungen hinterlegten Werte $A_{x_1}^+,\ A_{x_1}^-$ bzw. $A_{u_1}^+,\ A_{u_1}^-$ erklärt. Die jeweils dazu angegebene Schwankung ist die Standardabweichung von diesen Mittelwerten und soll somit ein Maß dafür sein, wie konstant die Amplituden über mehrere Perioden hinweg sind. Die in den Abbildungen angegebenen Werte $T_{x_1}^+,\ T_{x_1}^-$ bzw. $T_{u_1}^+,\ T_{u_1}^-$ sind die Periodendauern, die dadurch zustande gekommen sind, dass zu je zwei benachbarten Maxima bzw. Minima die τ Differenz gebildet wurde. Über all so entstandenen Periodendauern wurde gemittelt, was den jeweils angegebenen Wert erklärt. Die dazu angegebenen Schwankungen sind Standardabweichungen von diesen Mittelwerten und sollen somit ein Maß dafür sein, wie konstant die Perioden über mehrere τ hinweg sind. Für $N = 10^3$ zeigen sich Schwankungen der Amplitude im tausendstel Bereich und für größere N werden diese Schwankungen immer kleiner. Die Schwankung der Periode für kleine N ist dadurch zu erklären, dass der Algorithmus, der die Maxima bzw. Minima ermittelt, bei einer zu groben zeitlichen Auflösung auf kein eindeutiges Maxima bzw. Minima trifft. Das heißt, er findet zwei fast gleichen Werte und je nach Wert der Nachkommastellen nimmt er das linke oder rechte "Maxima". Weiter ist bei $N = 10^5$ die Schwankung exakt Null, das heißt er findet eindeutige Maxima bzw. Minima, die immer wieder den gleichen Zeitlichen Abstand aufweisen.

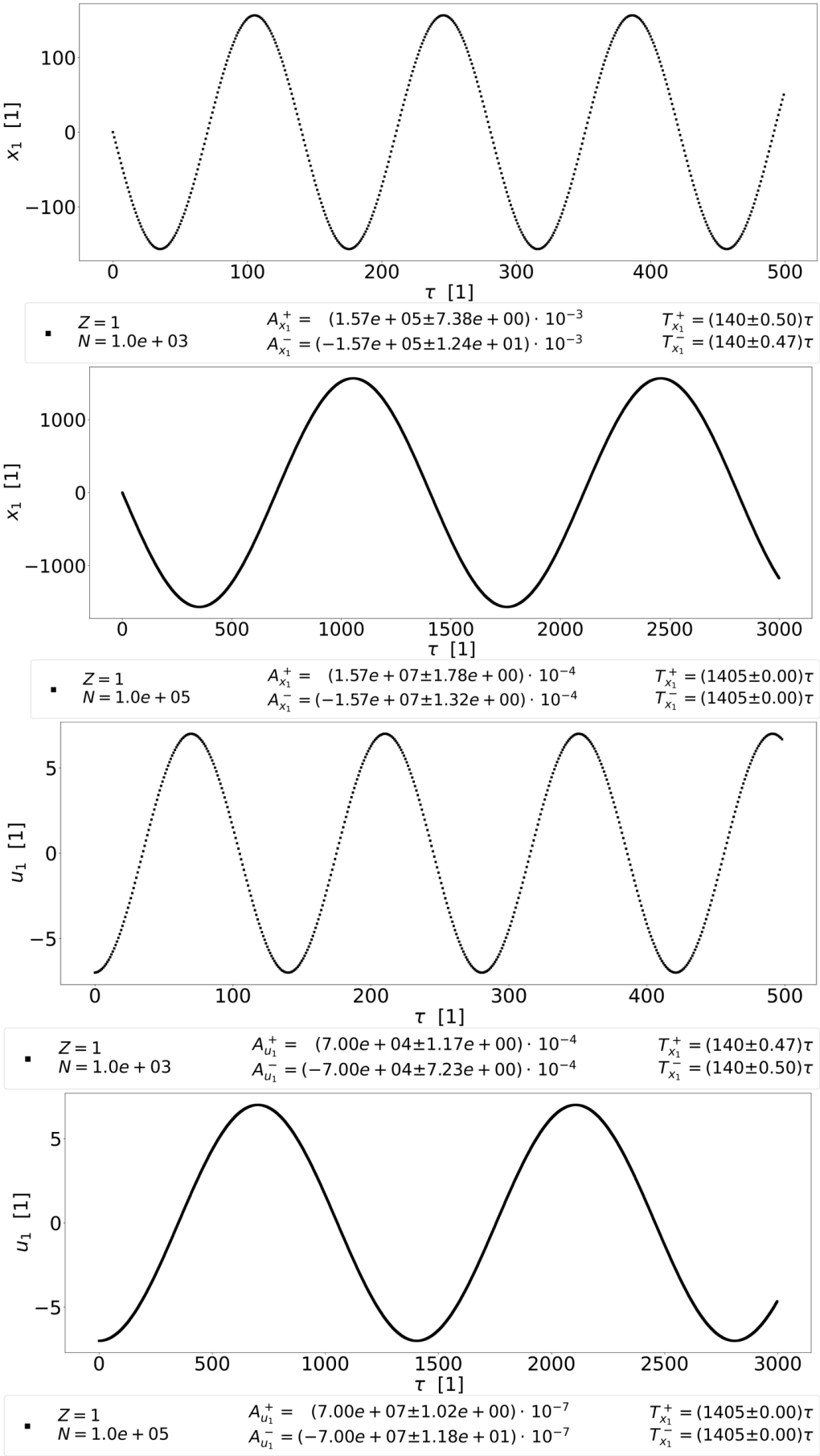


Abbildung 18: Ort und Geschwindigkeit über τ. Vorgegebene Startgeschwindigkeit $u_1 = -7$. $A_{x_1}^{\pm}$ & $A_{u_1}^{\pm}$ bezeichnen die mittlere positive bzw. negative Amplitude. $T_{x_1}^{\pm}$ & $T_{u_1}^{\pm}$ bezeichnen die mittleren Maxima bzw. Minima Abstände in Einheiten von τ. Höhere Auflösung unter Link {8}.

Schließlich wurde noch $\forall N \in \{[1\,;\,1000] \subset \mathbb{N}\} \cup \{n \,|\, n = 10^3 \cdot \nu,\ \nu \in [1\,;\,100] \subset \mathbb{N}\}$ und $\tau_{max} = 3000$ die Amplituden und Perioden wie oben beschrieben berechnet. Damit wurde für den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} &= k = \frac{m(2\pi)^2}{Z} \cdot \frac{1}{(T_{x_1}^{\pm})^2} \\ N &= \frac{Z}{m(2\pi)^2} \cdot T^2 =: \alpha \cdot (T_{x_1}^{\pm})^2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

N über $(T_{x_1}^{\pm})^2$ geplottet. Wie erwartet ergaben sich Geraden. Mit Fits an diese Geraden wurden die Steigungen ermittelt, welche Abweichungsfaktoren $\beta^{\pm} = (FitSteigung)^{\pm}/\alpha$ von $\beta^{+} = 2.0002$ im Fall von $T_{x_1}^{+}$ und $\beta^{-} = 1.9998$ im Fall von $T_{x_1}^{-}$ ergaben. Diese lassen auf einen Faktor zwei schließen, da ein Faktor 1 die Erwartung gewesen wäre. Auf den Faktor 2 wird bei der Analyse zur Energieerhaltung eingegangen. Damit lässt sich also bis auf den Faktor 2 sagen, dass der für den HO erwartete Zusammenhang zwischen k und ω gegeben ist (vgl. Abbildung 19). Weiter wurde für den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} A_{u_1}^{\pm} &= A_{x_1}^{\pm} \cdot \frac{2\pi}{T_{x_1}^{\pm}} \\ A_{x_1}^{\pm} &= \frac{A_{u_1}^{\pm}}{2\pi} \cdot T_{x_1}^{\pm} \end{aligned} \tag{6.7}$$

$A_{x_1}^{\pm}$ über $T_{x_1}^{\pm}$ aufgetragen. Wie erwartet ergaben sich Geraden. Mit Fits an diese Geraden wurden die Steigungen ermittelt. Im plus Fall ergab sich $2\pi \cdot (FitSteigung)^{+} = 6.9997$ und im minus Fall ergab sich $2\pi \cdot (FitSteigung)^{-} = 6.9992$. Ein Vergleich dieser Werte mit der eingestellten Startgeschwindigkeit $|u_1| = 7$ lässt den Schluss zu, dass die Entwicklung des HO´s aus der finiten projektiven Geometrie heraus auch den Zusammenhang der Gleichung (6.7) bewahrt (vgl. Abbildung 19).

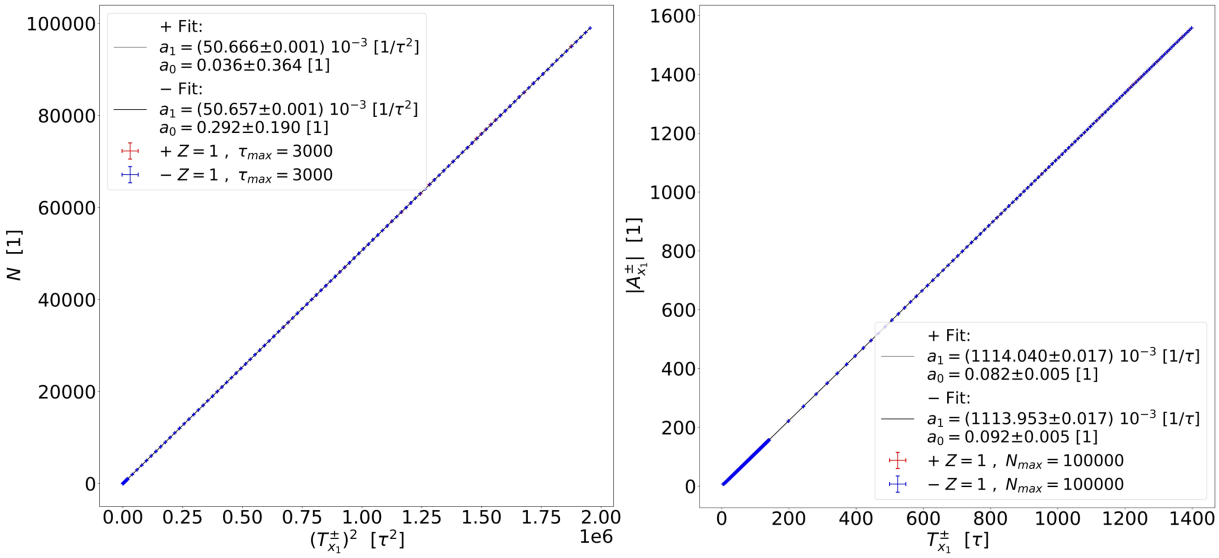


Abbildung 19: Links: Nenner über quadratischer Periodendauer zur Verifizierung der Gleichung (6.6). Jeweils für die mittleren Periodendauern über 3000 τ-Schritte, die aus den positiven Ortsamplituden Abständen bzw. negativen ermittelt wurden. Rechts: Positive Ortsamplituden bzw. negative über den Periodendauern, die aus den positiven Ortsamplituden Abständen bzw. negativen ermittelt wurden. In beide Plots wurde jeweils für den plus und minus Fall eine Gerade $f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ gefittet. Höhere Auflösung unter Link {8}.

Weiter ist noch der Plot zu den Gamma Faktoren zu zeigen. Es wurde bewusst der Plural verwendet, da einerseits $\gamma = dx_0/d\tau \approx x_0/\tau$ ist andererseits $\gamma = u_0$ sein sollte, bei der Wahl $c = 1$. Weiter gibt es die Faktoren γ_τ aus Gleichung (6.1) die zu jedem τ-Schritt berechnet wurden. All diese Versionen, die näherungsweise eigentlich das Gleiche sein sollten, wurden in Abbildung 20 aufgetragen. In dieser Konstruktion haben wohl x_0/τ und u_0 nicht die Bedeutung von γ. Denn der γ Faktor in Abhängigkeit von einer oszillierenden Funktion weißt eine völlig andere Form auf, welche so wie γ_τ wegen der gegen c kleinen Startgeschwindigkeit aussehen sollte. Außerdem sollten x_0/τ und u_0 - global gesehen - nicht vollständig vom Positiven ins Negative wechseln, wenn sie etwas mit dem Gamma-Faktor zu tun haben sollen.

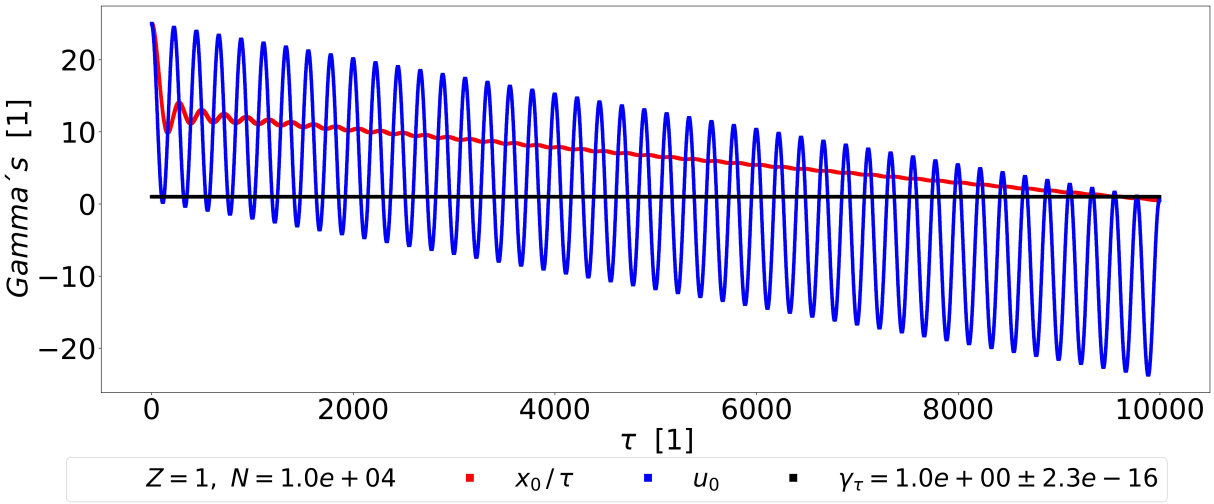


Abbildung 20: Iterativ erzeugte x_0 Koordinate durch τ dividiert und neben iterativ erzeugtem u_0 und γ aufgetragen. Höhere Auflösung unter Link {8}.

Weiter wurde für den Zusammenhang:

$$E_{ges} = E_{kin}(\tau) + E_{pot}(\tau) = \frac{1}{2}m[(\hat{u}(\tau))_1]^2 + \frac{1}{2}k[(\hat{x}(\tau))_1]^2 \cdot 2 = \\ = \frac{1}{2}mA_{u_1}^2 = const. \tag{6.8}$$

$E_{kin}(\tau)$, $E_{pot}(\tau)$ und E_{ges} über τ aufgetragen. Dabei musste der zu Gleichung (6.6) gefundene Faktor 2 konsequenterweise ergänzt werden. Damit hat sich die Abbildung 21 ergeben. Der angegebene Wert der Gesamtenergie ist dabei der Mittelwert über die sich ergebenden Werte für die Gesamtenergie nach Gleichung (6.8) für die zugrunde liegenden iterativ erzeugten Daten. Die Schwankung ist die Standardabweichung vom Mittelwert und somit ein Maß für die Konstanz der Gesamtenergie. Dabei wird diese Schwankung für größer werdende N kleiner, da man mit größer werdenden N der kontinuierlichen Zeit-Translationsinvarianz immer näher rückt (vgl. Abb. 21). Somit ist auch die Energieerhaltung im Makro-Limes bis auf den Faktor 2 gewahrt. Der Faktor 2 rührt vermutlich daher, da wie von Simon in [17] Abschnitt 4.2 Gleichung (36) gezeigt, in der finiten projektiven Geometrie das Potential zu einem τ analog zur projektiven Geschwindigkeit eine Differenz von den Potentialwerten Vorher und Nachher ist und somit kein Faktor 1/2 im Potential auftritt. Warum er dennoch in der kinetischen Energie vorliegt, sollte daher rühren, das wie zu Gleichung (4.11) gezeigt, sich der Ausdruck der klassischen kinetischen Energie als Lagrangian ohne Potential aus der Newton-Quadrik gerade mit dem Faktor 1/2 im finiten Projektiven konstruieren lässt. Dieser klassische Ausdruck der kinetischen

Energie folgt ebenso, wenn der Lagrangian der aus der Minkowski-Quadrik abgeleitet wurde, bzgl. Geschwindigkeiten die klein gegen c sind genähert wird. Da die Startgeschwindigkeit klein gegen c gewählt ist, ist eben der klassische Ausdruck der kinetischen an dieser Stelle verwendbar. Außerdem ergeben sich für verschiedene Startgeschwindigkeiten analoge Ergebnisse und für eine positive Startgeschwindigkeit - anstatt wie in dieser Arbeit eine negative gewählt - liegt in Ort und Geschwindigkeit wie erwartet eine Phasenumkehr vor.

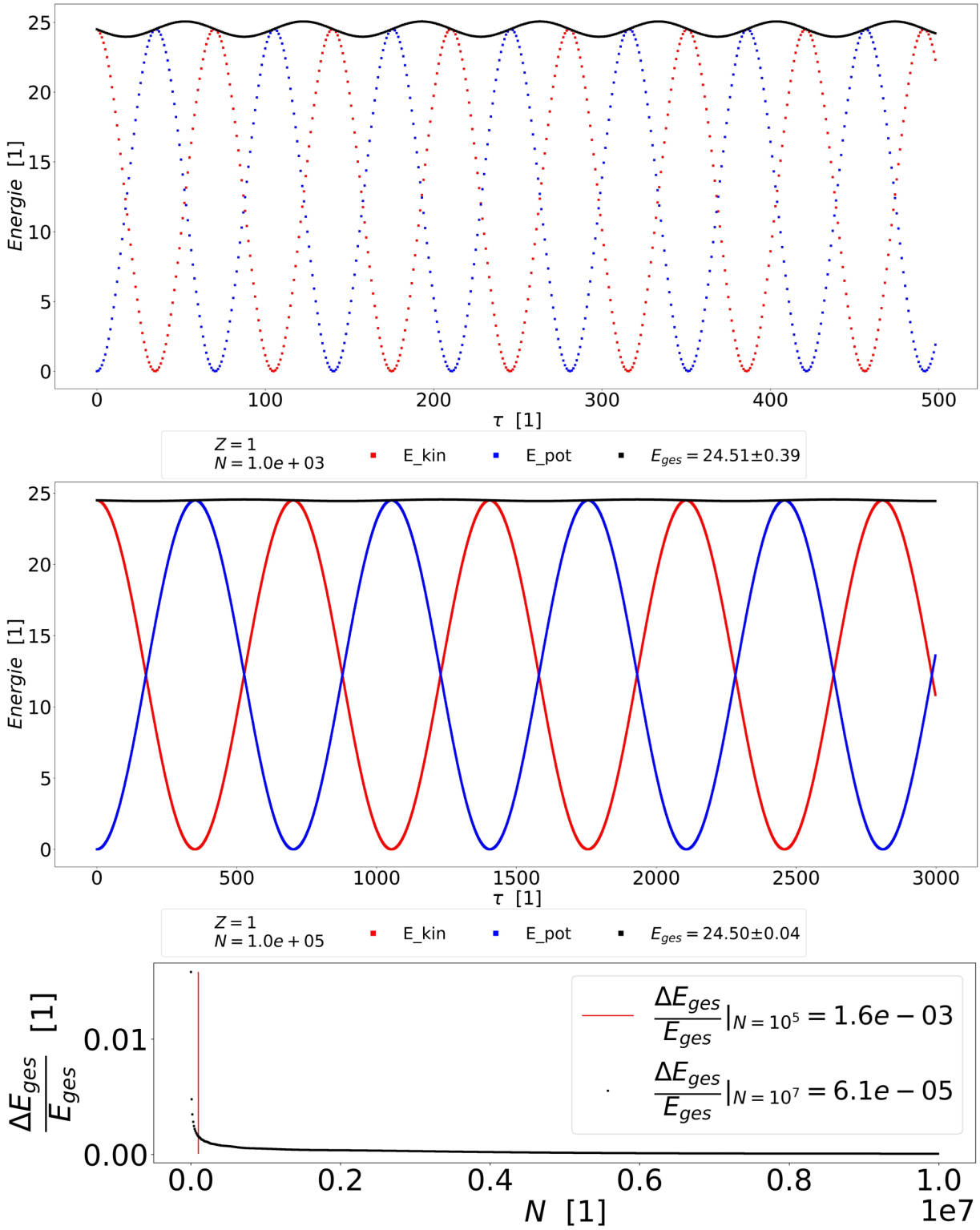


Abbildung 21: Gesamtenergie als Summe von kinetischer und potentieller des HO im Makro-Limes nach Gleichung (6.8). Höhere Auflösung unter Link {8}.

Weiter wurden die $(gx_d)^2$ Werte mit Gleichung (6.5) aus den mittels Punktspiegelung iterativ erzeugten Daten berechnet und über τ aufgetragen. Diese mit τ nicht konstanten Werte sind in Abbildung 22 ersichtlich. Mit bloßem Auge aus den Abbildungen schwer erkennbar, jedoch sind unter den $(gx_d)^2$ Werten auch negative Werte dabei. Die Anzahl der Werte $(gx_d)^2 < 0$ ist in den Abbildungen vermerkt. Auch wenn man die Startkonstruktion auf die maximale Höhe - hier 72, nicht [73 ; 75], da für [73 ; 75] nur Quadrikpunkte vorliegen, die eine Startgeschwindigkeit von Null implizieren - setzt, ergeben sich zwar weiterhin analoge Resultate bzgl. der Orte, Geschwindigkeiten und der Energie, jedoch nimmt auch dann $(gx_d)^2$ Werte kleiner Null an. Der Wert von $(gx_d)^2$ zu $\tau = 0$ ist dabei wie erwartet, das Quadrat der Höhe der Startkonstruktion.

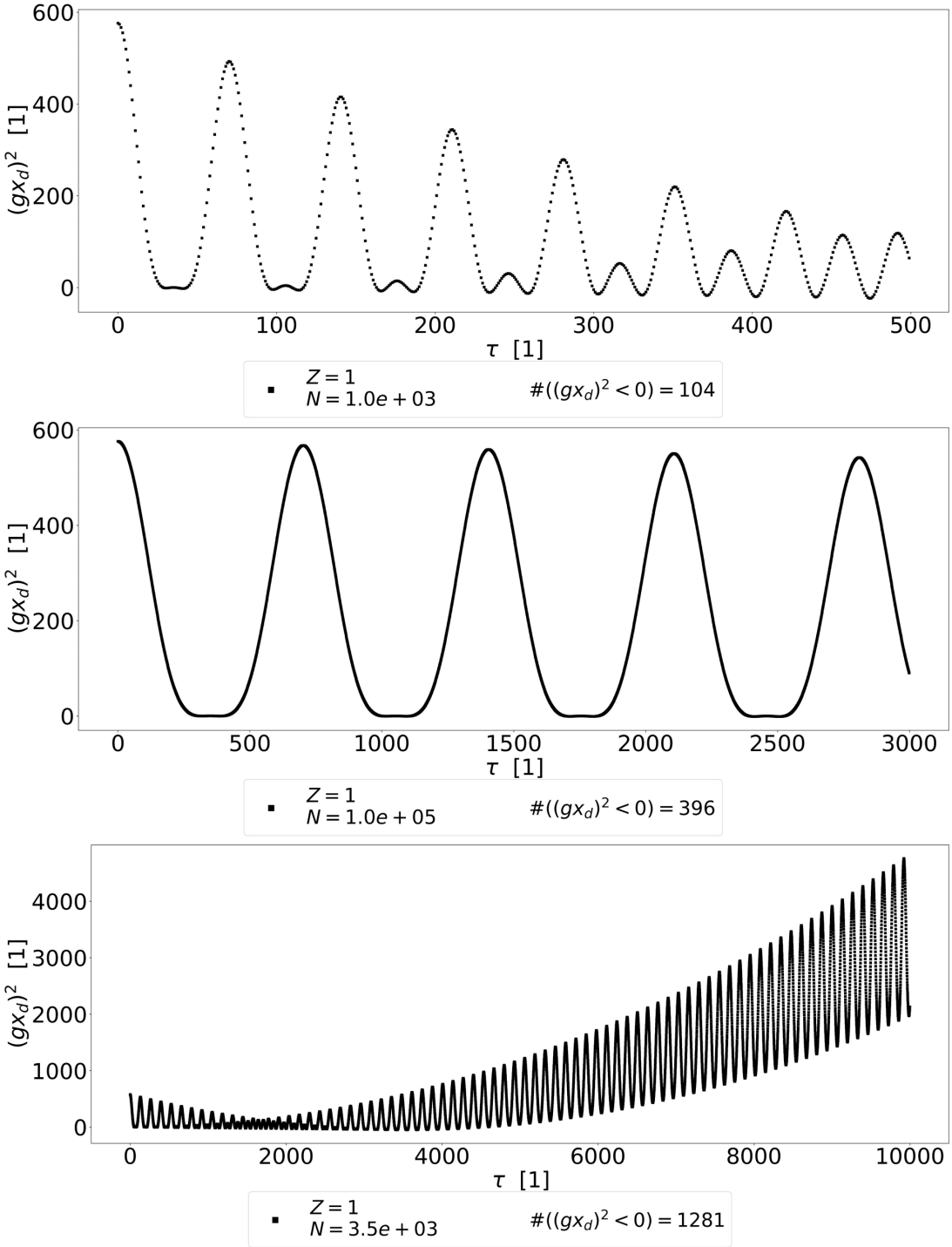


Abbildung 22: Werte von $(gx_d)^2$ nach Gl. (6.5) berechnet aus den iterativ erzeugten Daten mittels Punktspiegelung und aufgetragen über τ, mit $g = 1$. Höhere Auflösung unter Link {8}.

Den bisher präsentierten Resultaten liegt die Minkowski-Quadrik zu Grunde. Nun soll dem ganzen Prozedere die Newton-Quadrik zu Grunde gelegt werden. Für die projektive Beschleunigung wurde bisher:

$$\hat{a}_\tau = \begin{bmatrix} \vec{a}_\tau \\ x_{d=2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -k\gamma_{\tau-1}^4 \begin{pmatrix} u_{1,\tau-1}x_{1,\tau} \\ x_{1,\tau} \end{pmatrix} \\ m\, a_{d=2} \end{bmatrix}$$

verwendet. Um von Ergebnissen der SRT zu klassischen Ergebnissen zu gelangen, nähert man $v << c$, wodurch man $\gamma = 1$ setzt. Damit würde sich für die projektive Beschleunigung:

$$\hat{a}_\tau = \begin{bmatrix} a_{0,\tau} \\ a_{1,\tau} \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -kx_{1,\tau}u_{1,\tau-1} \\ -kx_{1,\tau} \\ m\, a_2 \end{bmatrix}$$

ergeben. Weiter berechnet man die Newton-Quadrik zum τ-ten Center $\hat{c}_\tau = \hat{x}_\tau \oplus \hat{a}_\tau$:

$$\hat{Q}_\tau^N = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -c_{0,\tau} \\ 0 & c_2 & -c_{1,\tau} \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -c_{0,\tau} \\ 0 & c_2 & -c_{1,\tau} \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_2^2 \\ 0 & c_2^2 & -c_{1,\tau}c_2 \\ -c_2^2 & -c_{1,\tau}c_2 & c_{1,\tau}^2 + 2c_{0,\tau}c_2 \end{bmatrix}.$$

Anschließend bildet man das Quadrik-Polynom:

$$\begin{aligned} 0 = \hat{x}_{\tau\pm1}^T \hat{Q}_\tau^+ \hat{x}_{\tau\pm1} &= x_2^2\,(c_{1,\tau}^2 + 2c_{0,\tau}c_2) - x_2\, 2c_2(x_{0,\tau\pm1}c_2 + x_{1,\tau\pm1}c_{1,\tau}) + c_2^2 x_{1,\tau\pm1}^2 =: \\ &=: x_2^2\, a_\tau + x_2\, b_\tau + c_\tau \end{aligned} \tag{6.9}$$

und wählt eine Startkonstruktion analog zum vorherigen Fall, mit $p = 151$, $\hat{x}_{-1} = [6,\, 6,\, 3]^T \in \hat{Q}_0^N$ und $\hat{x}_0 = [\vec{0}, 3]^T$. Führt eine Punktspiegelung am ersten Center $\hat{c}_0 = \hat{x}_0$ aus, da auch das Newton-Quadrik-Polynom die notwendige Punktsymmetrie besitzt. Damit erhält man $\hat{x}_1 = [-6,\, -6,\, 3]^T \in \hat{Q}_0^N$, was eine Startgeschwindigkeit $u_1 = -6$ zur Folge hat. Nun beginnt eine Schleife im Quellcode, die immer wieder die Punktspiegelung verwendet, wie oben ausführlich beschrieben. Das heißt die durch diese Schleife iterativ erzeugten Daten werden sich in ihrem Kern nicht von den obigen Resultaten unterscheiden. Oben wurde die Startgeschwindigkeit klein gegen c gewählt, weswegen der γ-Faktor in jedem Iteration-Schritt wie in Abbildung 20 gezeigt, Fluktuationen der Größenordnung 10^{-16} um die Eins ausgeführt hat. Somit sind obige Ergebnisse im Grunde der Newton-Fall. An dieser Stelle wundert man sich, wieso die Ergebnisse von der Quadrik unabhängig sind. Aber sie sind nicht vollständig unabhängig. Denn der Verlauf von $(gx_{d=2})^2$ bzw. hier nur $x_{d=2}^2$ unterscheidet sich, da er eben von der Quadrik abhängig ist. Dazu löst man zunächst Gleichung (6.9) nach $x_{d=2}$ auf:

$$x_{d=2,\pm} = \frac{1}{2a_\tau} \cdot (-b_\tau \pm \sqrt{b_\tau^2 - 4a_\tau c_\tau}) = x_{d=2,\pm}(\tau) \tag{6.10}$$

und verwendet die iterativ erzeugten Daten um diese Werte für die jeweiligen τ zu berechnen. Der τ-Verlauf dieser ist in Abbildung 23 für $N \in \{10^3, 10^5, 10^7\}$ dargestellt. Damit zeigt sich, dass die Minus-Lösung die sinnvolle Wahl sein sollte, da der $x_{2,-}$-Verlauf gegen die vorgegebene Starthöhe von 3 konvergiert und der $x_{2,+}$-Verlauf nicht.

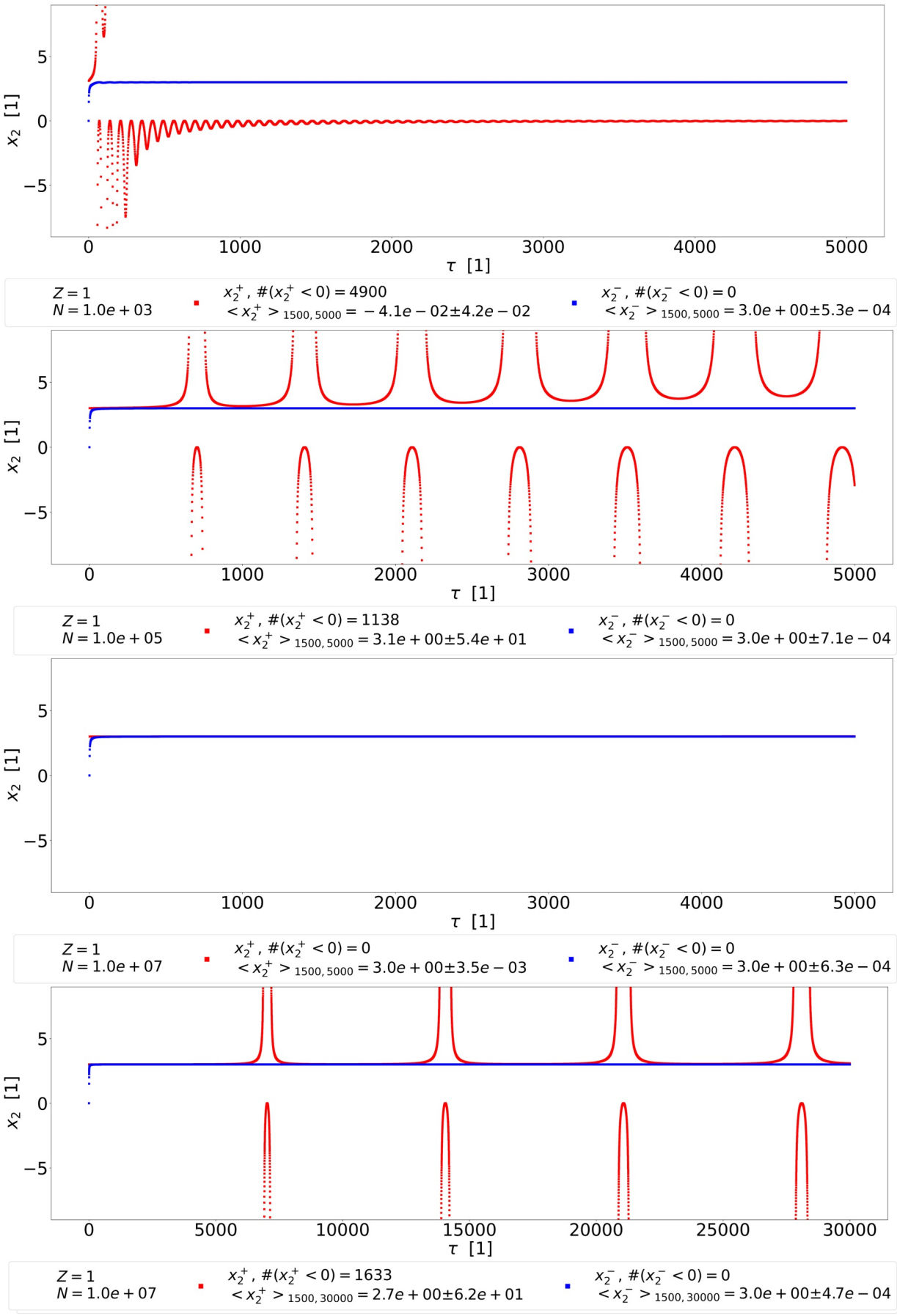


Abbildung 23: Die sich durch die Newton-Quadrik ergebenden $x_{2,\pm}$-Verläufe über τ. Höhere Auflösung unter Link {8}.

Mit Abbildung 23 zeigt sich, dass die klassisch berechneten Trajektorie-Daten den Höhenverlauf konvergieren lassen, sofern man die Newton-Quadrik zugrundelegt. Man kann nun argumentieren, der Höhenverlauf unter der Minkowski-Quadrik aus Abbildung 22 ist für die klassisch berechneten Trajektorie-Daten, also für Geschwindigkeiten $u_1 << c$, nicht zulässig. Daher soll nun der sich unter der Minkowski-Quadrik ergebende Höhenverlauf für eine vorgegebene Startgeschwindigkeit $u_1 \approx 0.967\,c$ analysiert werden. Für die sich dabei ergebenden Plots muss darauf hingewiesen werden, dass sich nicht der erwartete relativistische Orts- und Geschwindigkeitsverlauf ergeben hat und folglich auch die Energieerhaltung nicht gegeben ist. Auf diese nicht der Erwartung entsprechenden Verläufe im relativistischen Fall wird im Anschluss detaillierter eingegangen. Da nicht der erwartete relativistische Orts- und Geschwindigkeitsverlauf vorliegt kann man argumentieren, dass folglich der Höhenverlauf nicht korrekt sein kann. Dennoch betrachte man an dieser Stelle den sich für eine vorgegebene Startgeschwindigkeit $u_1 \approx 0.967\,c$ ergebende Höhenverlauf in Abbildung 24.1. Denn dieser ist ein Beispiel für einen nicht trivialen Attraktor. Dabei können Attraktoren triviale bis hin zu beliebig komplexe Formen annehmen. Der Begriff Attraktor taucht in der Theorie dynamischer Systeme auf und ist eine Untermenge eines Phasenraums, die von einem dynamischen System angestrebt wird (vgl. [30]). Somit liegt es nahe, die (x_2, τ)-Ebene als eine Art Phasenraum aufzufassen und den Höhenverlauf $x_2 = x_2(x_0(\tau), x_1(\tau))$ als τ-Entwicklung der über die Minkowski-Quadrik miteinander vernetzten Raumzeitkoordinaten. Wie der Abbildung 24.1 zu entnehmen ist, ergeben sich komplexe Attraktoren. Das es vermutlich Attraktoren und keine nummerischen Fehler sind, die sich fortpflanzen und sich ab einer gewissen Anzahl von Iterationsschritten bemerkbar machen, scheint mit folgendem Gedankengang plausibel. Nummerische Fehler sollten daher rühren, dass die Zeitauflösung nicht fein genug ist. Wählt man nun eine feinere Zeitauflösung, also ein größeres N, so sollten die diskretisierten Höhen in einen - der nummerischen Begrenztheit geschuldeten - relativ kontinuierlichen Verlauf übergehen, welcher bis ca. $\tau = 0.75 \cdot 10^7$ bereits vorliegt (vgl. Abbildung 24.2). Das heißt die Diskretisierung der Höhen in Abbildung 24.1 sollte sich für ein größeres N nach rechts verschieben, wenn sich fortpflanzende nummerische Fehler die Ursache der Diskretisierung sind. Allerdings zeigt sich in Abbildung 24.3, in der ein um den Faktor 10^3 größeres N gewählt wurde, das Gegenteil. Somit liegen vermutlich nicht triviale Attraktoren vor. Mit Abbildung 24.4 erkennt man, dass der Ortsverlauf keine Attraktoren in dem τ-Bereich aufweist, in dem der Höhenverlauf sich hinsichtlich der Attraktoren manifestiert. Für den Geschwindigkeitsverlauf ergibt sich ein analoges Bild. Selbst wenn sich die richtigen Orts- und Geschwindigkeitsverläufe für eine relativistische Startgeschwindigkeit ergeben hätten, würden sich vermutlich dennoch nicht triviale Attraktoren im Höhenverlauf ergeben, sofern dieser für die richtigen Orts- und Geschwindigkeitsverläufe nicht konvergiert. Schreibt man dem Höhenverlauf sowohl im Reellen als auch im Finiten keine physikalische Bedeutung zu, so sollten nicht triviale Attraktoren im Höhenverlauf kein Problem darstellen.

Wie bereits erwähnt, war es für eine relativistische Geschwindigkeit $u_1 \approx 0.967\,c$ und unter Verwendung der Punktspiegelungsmethode nicht möglich den erwarteten Orts- und Geschwindigkeitsverlauf eines HO und somit auch nicht die Energieerhaltung des HO aus der finiten projektiven Geometrie heraus zu entwickeln. Dies wird mit der Abbildung 25 ersichtlich. Da die Verläufe der Raumzeitkoordinaten nicht die erwarteten sind, kann aus dem Höhenverlauf nicht gefolgert werden, ob die Quadrik und somit die Hyperbelpaare über dem reellen Körper zu jedem Center aufgestreckt werden mussten oder nicht.

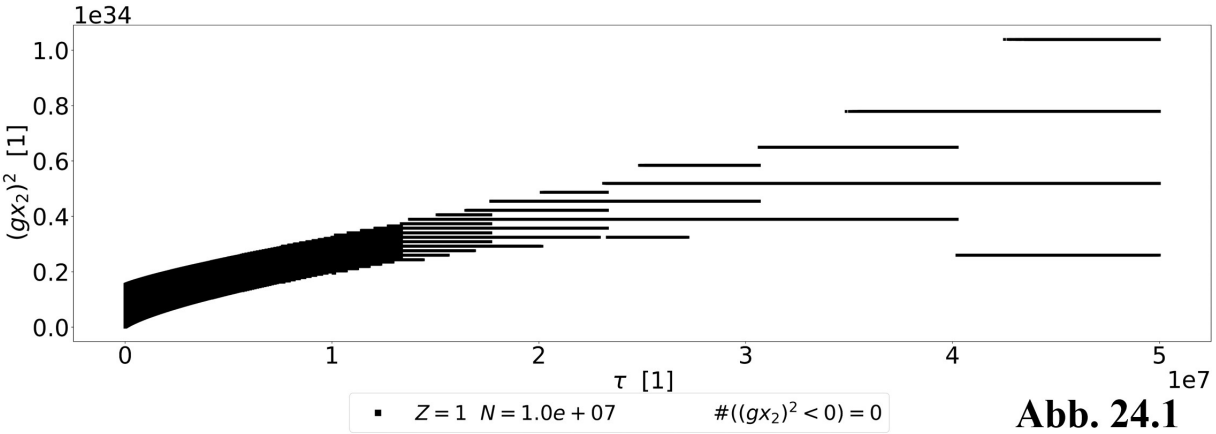


Abb. 24.1

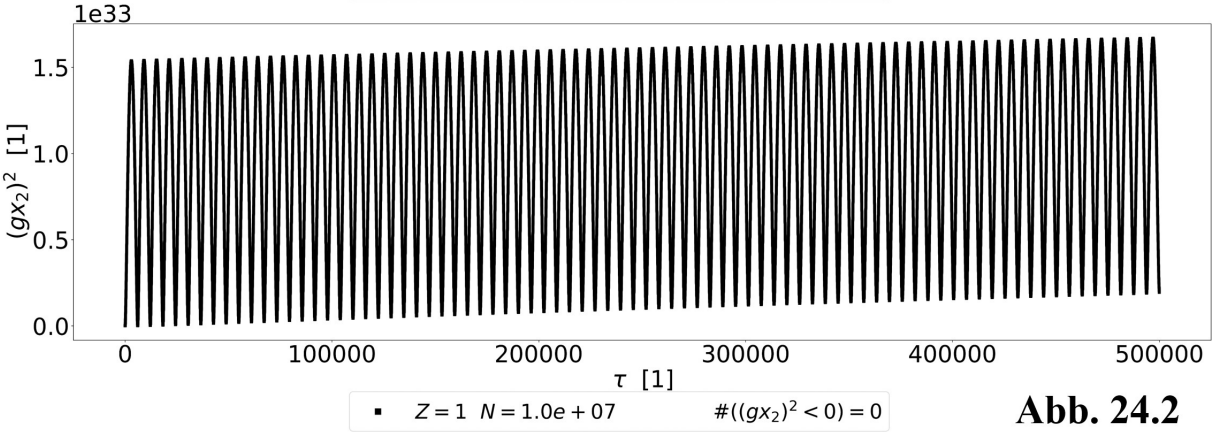


Abb. 24.2

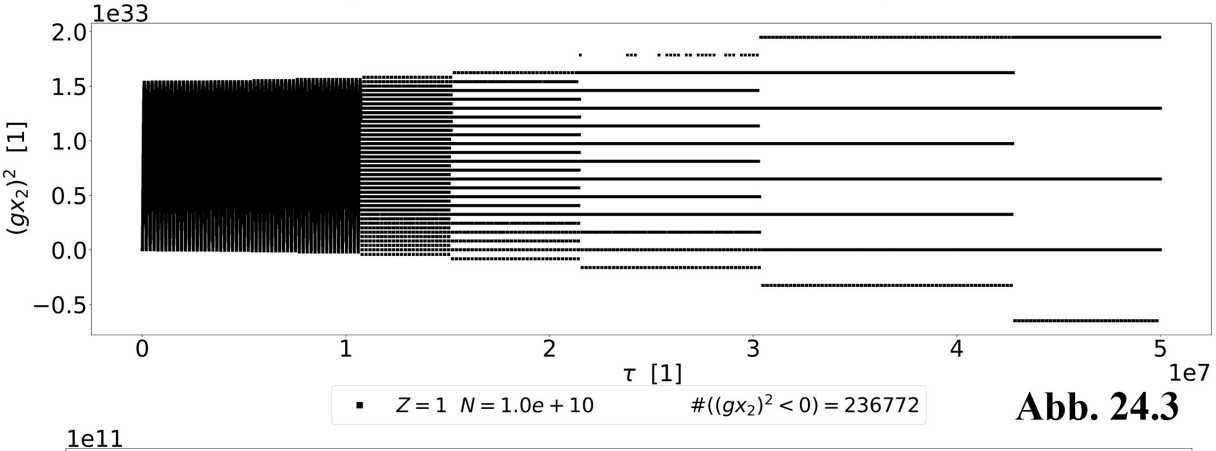


Abb. 24.3

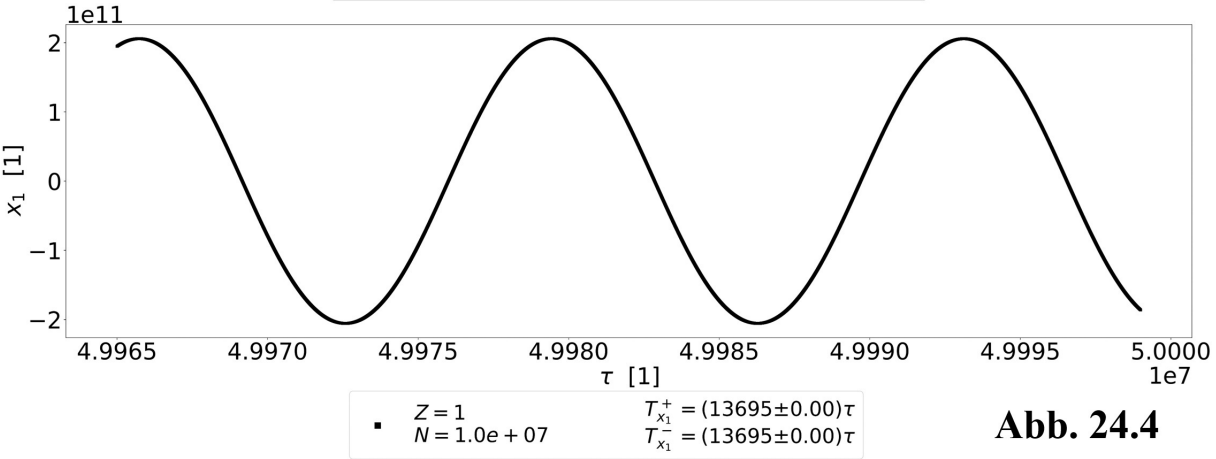


Abb. 24.4

Abbildung 24: Werte von $(gx_d)^2$ nach Gl. (6.5) berechnet aus den iterativ erzeugten Daten mittels Punktspiegelung und aufgetragen über τ, mit $u_1(\tau = 0) \approx 0.967\,c$ und $g = 1$. Weiter sind die x_1 und u_1 Verläufe für die gleichen Parameter aufgetragen, welche keine Attraktoren aufweisen. Höhere Auflösung unter Link {9}.

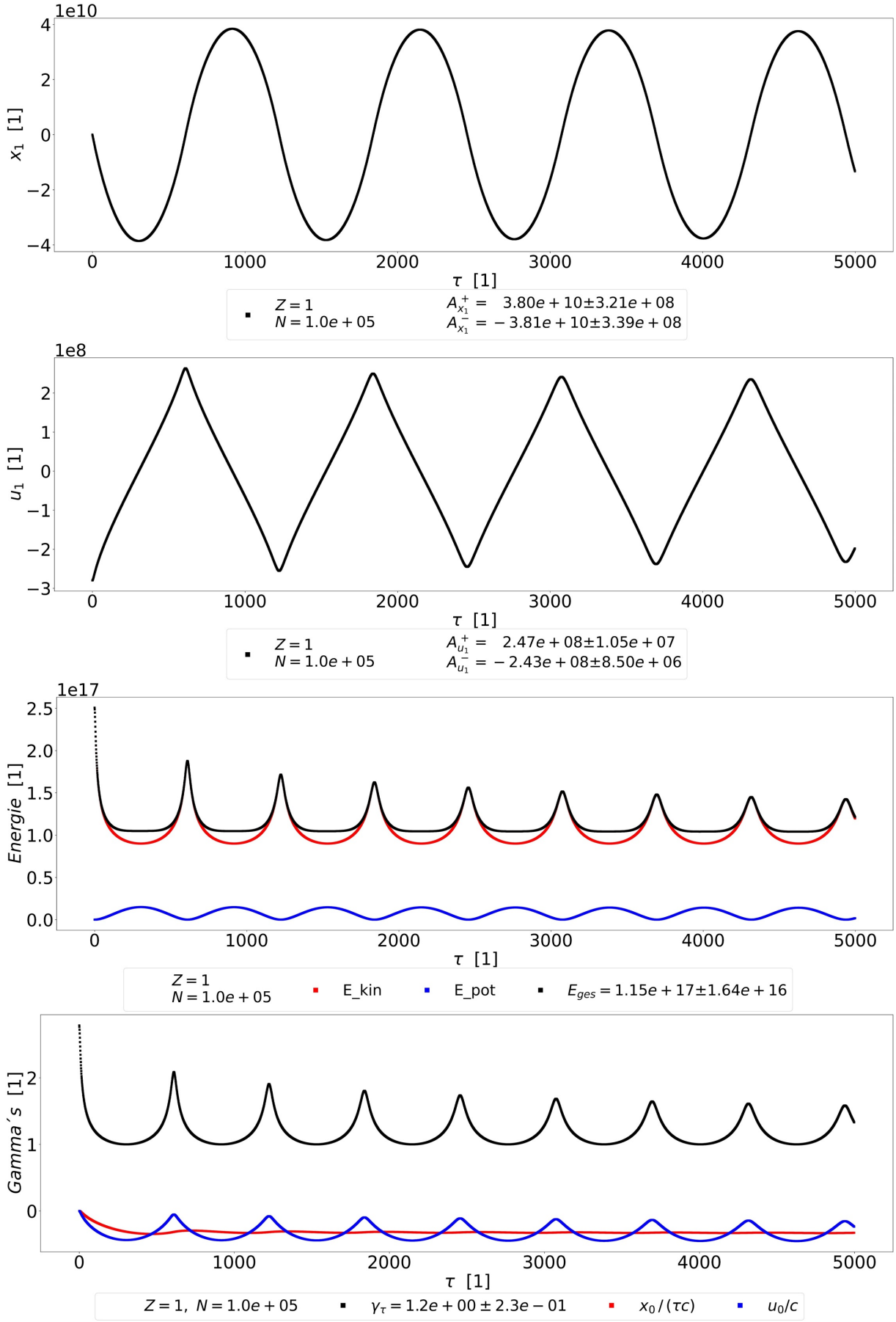


Abbildung 25: x_1, u_1, E und γ Verläufe mit τ für $u_1(\tau = 0) \approx 0.967\,c$ und $g = 1$. Höhere Auflösung unter Link {10}.

Das sich nicht die erwarteten Resultate für eine relativistische Geschwindigkeit ergeben haben, liegt vermutlich daran, dass die Konstruktion der Trajektorie für relativistische Geschwindigkeiten noch nicht vollständig ist. Denn bisher wurde mit der Punktspiegelung iteriert, d.h. es wurde zu jedem τ zunächst der Koordinatenabstand $\Delta(\vec{x}_{\tau,\tau-1})_i = (\vec{c}_\tau)_i - (\vec{x}_{\tau-1})_i$ berechnet und dieser zum aktuellen Center $\hat{c}_\tau = \hat{x}_\tau \oplus \hat{a}_\tau$ addiert, um den nächsten Punkt $\hat{x}_{\tau+1} = [\vec{c}_\tau + \Delta\vec{x}_{\tau,\tau-1}, x_d]^T$ zu erhalten. Das heißt es wurde im Grunde die Parallelprogramm-Identität der projektiven Beschleunigung aus Definition 3.4 und zugehöriger Abbildung 6 verwendet. Dieses Vorgehen war im relativistischen Fall nicht zielführend und im klassischen nur begrenzt, da die x_0 und u_0 Komponenten, wie mit Abbildung 20 gezeigt, nicht im erwarteten Verlauf resultierten. Somit sollte eine relativistische vollständige Konstruktion der Trajektorie im Grenzfall $u_1 << c$ die richtigen x_0 und u_0 Verläufe liefern und dabei die bisherigen korrekten x_1 und u_1 Verläufe beibehalten und im Fall relativistischer Geschwindigkeiten die entsprechenden Verläufe liefern. Es stellt sich also die Frage, wie man die bisherige Konstruktionsmethode weiter ausbaut.

Dazu überzeugt man sich zunächst mit der Gleichung (D.12) im Anhang D, dass es mit dem bisherigem Konzept notwendig ist, dass man i.d.T. die Hyperbeln in jedem τ-Schritt entsprechend Strecken muss. Das heißt, man hat zum Center $\hat{c}_\tau$ eine gewisse Einheitslängenskalierung durch ein Hyperbelpaar bzw. dortige Quadrik und im Center $\hat{c}_{\tau+1}$ ist eine - aufgrund der Anschlussbedingung, dass $\hat{x}_\tau \in Q_{c_{\tau+1}}$ sein muss - andere Skalierung notwendig, da die Hyperbelpaare entsprechend gestreckt werden müssen. Das heißt man kann sich zu jedem Center ein anders skaliertes Inertialsystem (IS) denken. Das zu jedem Center ein anders skaliertes IS vorliegt, macht auch physikalisch Sinn. Denn jedes IS zu einem Center ist bzgl. dem vorherigen relativ bewegt mit einer lokal konstanten Geschwindigkeit, welche sich bei einer beschleunigten Bewegung fortlaufend verändert bzw. im Fall des HO oszilliert. Das heißt für eine modifizierte Konstruktion der Trajektorie sollte man nicht ausschließen, dass eine Streckung der Hyperbelpaare neben einer Verschiebung notwendig ist, um eine beschleunigte Bewegung zu beschreiben.

Damit im Hinterkopf ergab sich die erste Idee für eine Modifikation der Konstruktion der Trajektorie. Man gehe von einer Startkonstruktion aus, bei der o.B.d.A. $\hat{x}_\tau = [\vec{0}, x_d]^T$ ist und wählt $\hat{x}_{\tau+1}$. Nun hält man daran fest, dass die Beschleunigung aus der Vierkraft der SRT resultieren soll und das neue Center $\hat{c}_{\tau+1} = \hat{x}_{\tau+1} \oplus \hat{a}_{\tau+1}$ ist. Weiter hält man nicht mehr daran fest, dass für die Beschleunigung und die vorher und nachher Geschwindigkeiten die Parallelprogramm-Identität und somit die Punktspiegelung gelten soll, also das $2\vec{a}_{\tau+1} = \vec{u}_{\tau+1} - \vec{u}_\tau$ nicht mehr gelten muss. Nun gilt es $\hat{x}_{\tau+2}$ zu bestimmen, wobei die bisherigen Punkte der Trajektorie gegeben und fest sind. Die Punktspiegelung und somit die symmetrischen Koordinatenabstände $\Delta(\vec{x}_{\tau+1,\tau})_i$ sollen nicht mehr verwendet werden, um $\hat{x}_{\tau+2}$ zu bestimmen. Somit bleibt nur noch übrig, dass man $\hat{x}_{\tau+2}$ entlang der Geraden, die in $\hat{x}_\tau$ startet und durch $\hat{c}_{\tau+1}$ geht, sinnvoll verschiebt. Denn verschiebt man nicht nur entlang einer Geraden, so hat man das Problem, dass das System unterbestimmt sein wird. Nun werden die Punkte $\hat{x}_\tau$, $\hat{x}_{\tau+1}$ und $\hat{c}_{\tau+1}$ als Raumzeitkoordinaten aufgefasst, die bezüglich des IS zum Standardcenter $\hat{c}_\tau = [\vec{0}, x_d]^T$ gemessen werden. Somit wird auch der Koordinatenabstand $\Delta(\vec{x}_{\tau+1,\tau})_i$ bzgl. diesem IS gemessen. Weiter nimmt man an, dass das IS zum Center $\hat{c}_{\tau+1}$ bzgl. dem IS zum vorherigen Center relativ bewegt ist, mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{rel.} = \vec{c}_{\tau+1} - \vec{c}_\tau$ und wendet daher eine Lorentz-Transformation auf den Koordinatenabstand $\Delta(\vec{x}_{\tau+1,\tau})_i$ an. Damit soll sich nun der nächste Punkt ergeben als $\hat{x}_{\tau+2} = \hat{c}_{\tau+1} + \Lambda(\vec{v}_{rel.})\Delta(\vec{x}_{\tau+1,\tau})_i$. Dieses Vorgehen ist fragwürdig, da es impliziert, dass $\hat{x}_\tau$ bzgl. IS_τ und $\hat{x}_\tau$ bzgl. $\mathrm{IS}_{\tau+1}$ "global gesehen" nicht deckungsgleich sind und man somit auch die Forderung, dass vorher und nachher Geschwindigkeit Elemente der Quadrik sein müssen aufgibt. Dennoch wurde dieser Ansatz programmiert und getestet,

was kein zielführendes Resultat lieferte. Denn der Geschwindigkeitsverlauf divergierte und nahm Geschwindigkeiten größer c an. Dem System wurde also Energie zugeführt durch den Lorentz-Boost der Koordinatenabstände $\Delta(\vec{x}_{\tau+1,\tau})_i$. Während das System mit der Punktspiegelungsmethode im relativistischen Fall Energie verloren hat.

Daher ergab sich die zweite Idee für die Modifikation der Konstruktion der Trajektorie. Die Energieerhaltung sollte verwendet werden, um zu wissen, um wie viel der Punkt $\hat{x}_{\tau+2}$ entlang der Geraden - die von $\hat{x}_\tau$ durch $\hat{c}_{\tau+1}$ geht - verschoben werden muss. Um die Energieerhaltung explizit einbauen zu können, musste gefordert werden, dass der raumzeitliche Abstand $-(gx_d)^2 = (\vec{x}_\tau - \vec{c}_{\tau+1})^2 \equiv (\vec{u}_\tau + \vec{a}_{\tau+1})^2$ in jedem τ-Schritt konstant gleich der Gesamtenergie ist. Dadurch war es möglich $\gamma(\vec{v}_{\tau+1}) = \frac{1}{E_0}(\vec{u}_\tau^2 + \vec{a}_{\tau+1}^2 - V(\vec{r}_{\tau+1}))$ und damit $|\vec{v}_{\tau+1}|$ zu folgern. Weiter wurde $\hat{x}_{\tau+2} = \hat{c}_{\tau+1} + \lambda(\hat{c}_{\tau+1} - \hat{x}_\tau)$ verwendet, um auf den nachfolgenden Punkt zu schließen. Dabei wurde λ aus einer quadratischen Gleichung, die aus $(\vec{u}_\tau + \vec{a}_{\tau+1})^2 = const. = (\vec{u}_{\tau+1} + \vec{a}_{\tau+2})^2$ resultierte, gefolgert. Dabei haben sich die Beträge von $\vec{v}_{\tau+1}$ in $\vec{a}_{\tau+2} = \vec{a}_{\tau+2}(\vec{v}_{\tau+1}\,,\, \vec{a}_{\tau+2}^{(3er)}(\vec{r}_{\tau+2})) = \vec{a}_{\tau+2}(\vec{v}_{\tau+1}\,,\, \vec{a}_{\tau+2}^{(3er)}(\vec{r}_{\tau+1} + \vec{v}_{\tau+1})) = \vec{a}_{\tau+2}(\vec{r}_{\tau+1}\,,\, \vec{v}_{\tau+1})$ über die quadratische Gleichung in λ einarbeiten lassen. Die langwierige Rechnung zu den im Quellcode benutzten Endformeln wird nicht präsentiert, da dieser Ansatz nicht Zielführend war. Das dieser Ansatz nicht zielführend ist, hätte man mit der Forderung, dass die Gesamtenergie gleich der konstant gezwungenen Höhe sein soll, vermuten können.

7. Fazit

Mit den beiden fehlgeschlagenen Versuchen der Modifikation der Konstruktion der Trajektorie kann man vermuten, dass es nicht sinnvoll ist, wenn man das Parallelprogramm, also $2\vec{a}_{\tau+1} = \vec{u}_{\tau+1} - \vec{u}_\tau$, aufgibt. Insbesondere nicht wenn man zunächst $\vec{a}_{\tau+1} = \vec{c}_{\tau+1} - \vec{x}_{\tau+1}$ als eine Art Geschwindigkeit interpretiert und somit $\vec{u}_\tau = \vec{u}_{\tau+1} - 2\vec{a}_{\tau+1}$ als eine Art Impulserhaltung, wobei hier natürlich kein Stoß von Teilchen stattfindet. Außerdem scheint es nicht sinnvoll das Parallelprogramm aufzugeben, da dieses für einen τ-Schritt quasi eine finite Ableitung der Geschwindigkeit darstellt. Das Konzept vom dynamischen Constraint aufzugeben scheint auch nicht sinnvoll, da dieser eine Art Energieerhaltung repräsentiert, da er quasi eine finite projektive "Differentialgleichung" darstellt und eine Differentialgleichung lässt sich meist aus der Energieerhaltung im Kontext der Mechanik ableiten. Ob diese Auffassung von einer quasi Energie- und Impulserhaltung hinsichtlich des Parallelprogramms und des dynamischen Constraint ausreichend ist, oder ob man sie doch explizit in die Konstruktion der Trajektorie einarbeiten muss, muss sich noch zeigen. Jedoch, wenn an diesen beiden Konzepten - Parallelprogramm und dynamischer Constraint - festgehalten werden soll, bleibt noch nur die Beschleunigung als Angriffspunkt übrig. Für diese eine komplett neue einzuführen, anstatt die aus der SRT bekannte zu nutzen, ist sicherlich ein Versuch wert. Dennoch wird mit der Intuition die sich mit dieser Arbeit gebildet hat und nach einem Gespräch mit Mecke, hier ein anderer Weg vorgeschlagen. Denn mit dieser Arbeit wurde plausibel gemacht, dass man der Quadrik von vornherein mehr Freiheitsgrade zugestehen sollte, welche sich letztlich aus der Beschleunigung gerade so ergeben müssen, dass das Parallelprogramm und dynamischer Constraint gewahrt bleiben. Das soll heißen, dass nicht nur eine Verschiebung der Quadrik um die Beschleunigung erfolgen soll, sondern zudem eine Streckung bzw. Stauchung der Hyperbelpaare entlang der x_0-Achse und eine Streckung bzw. Stauchung der Hyperbelpaare entlang der x_1-Achse und falls nötig auch eine Drehung der Hyperbelpaare um das Center der Hyperbelpaare auf der affinen Hyperebene. Derart viele Freiheitsgrade mit nur zwei Parametern a_0 und a_1, im Fall $d = 2$, können erreicht werden, wenn statt eines Translationsoperators in Abhängigkeit von $\hat{c} = \hat{x} \oplus \hat{a}$ beispielsweise der folgende Operator verwendet wird:

$$\hat{P}_{-\hat{a}} = \begin{bmatrix} x_d \mathbb{1}_d & -\vec{a} \\ \pm\vec{a} & x_d \end{bmatrix} \text{, welcher} \tag{7.1}$$

auf die Minkowski-Quadrik angewendet wird und anschließend im Quadrik-Polynom:

$$0 = \hat{x}^T \hat{P}^T_{-\hat{a}} \hat{Q}^+ \hat{P}_{-\hat{a}} \hat{x} = (\vec{x} - \vec{a})^2 + (g x_d)^2 \pm 2g^2 \vec{x}^T \vec{a} + \frac{\vec{x}^T}{x_d} (\vec{a}\vec{a}^T) \frac{\vec{x}}{x_d} \tag{7.2}$$

resultiert. Damit zeigt sich, für $d = 2$, dass für ein $a_0 = 0$ nur allein der Parameter a_1 für eine Streckung bzw. Stauchung entlang der x_0- und x_1-Achse verantwortlich ist. Setzt man $a_0 \neq 0$, so zeigt sich, dass nur allein der Parameter a_1 für eine Streckung bzw. Stauchung entlang der x_0- und x_1-Achse und eine Rotation der Hyperbelpaare um das Center der Paare verantwortlich ist. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich, wenn man die Rollen der Parameter in den vorherigen Sätzen vertauscht. Somit stellt $\hat{P}_{-\hat{a}}$ eine Verschiebung und Neigung der Quadrik dar, deren Kombination für gewisse Parameterwerte auch eine Drehung hervorruft. Von den Möglichkeiten hinsichtlich der Freiheitsgrad der Quadrik, die nur durch diese zwei Parameter a_0 und a_1 gegeben sind, überzeugt man sich am besten, indem man das GeoGebra-Applet unter dem Link {10} aufruft und die graphischen Resultate begutachtet, die sich mit der Veränderung der Werte der Parameter ergeben. Außerdem kann man dem

GeoGebra-Applet entnehmen, dass unter dem Operator aus Gleichung (7.1) das Center der Hyperbelpaare auf der affinen Hyperebene nicht mehr durch $\vec{x} + \vec{a}$ gegeben ist. Das heißt, man müsste eine effektive Beschleunigung $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{b}$ einführen, wobei $\vec{a}$ aus der Vierkraft der SRT resultiert und $\vec{b}$ eine Verlängerung von $\vec{a}$ darstellt, welcher aus Gleichung (7.2) abgeleitet werden müsste unter Ausnutzung einer Mittelpunktsgleichung für Hyperbelpaare. Damit dann bzgl. dem Center $\vec{a}'$ eine Punktspiegelung ausgeführt werden kann. Auch wenn mit dem Operator aus Gleichung (7.1) mehr Möglichkeiten gegeben sind, ist es fraglich, ob von vornherein der dynamische Constraint hinsichtlich des vorher Punktes bzgl. dem aktuellen τ erfüllt sein wird. Falls nicht, sollte in Gleichung (7.1) anstatt $\pm\vec{a}$ ein Funktional $\vec{f}(\vec{a})$ verwendet werden. Gegebenenfalls könnten Erhaltungssätze für die Bestimmung des Funktionals hilfreich sein. Jedoch lässt sich all dies nicht mehr in dieser Arbeit klären.

Dennoch war es für den klassischen harmonischen Oszillator mit der Definition der projektiven Geschwindigkeit und Beschleunigung und dem Konzept des dynamischen Constraint möglich, ihn aus der finiten projektiven Geometrie heraus zu entwickeln. Dies stellt ein wesentliches Indiz dafür dar, dass es für den relativistischen harmonischen Oszillator ebenfalls möglich sein sollte.

Danksagung

Mein erster Dank richtet sich an Herrn Prof. Dr. Klaus Mecke, der es mir ermöglicht hat, meine Bachelorarbeit zu einem Thema zu schreiben, welches ich persönlich äußerst spannend finde. Außerdem möchte ich mich bei ihm für die zahlreichen Gespräche zur Arbeit bedanken, die mich immer wieder einen Schritt vorwärts haben kommen lassen, für den gewissen Spielraum zur Arbeit selbst und die damit verbundenen Ermutigungen Ideen einfach auszuprobieren.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie für die diversen Unterstützungen im Studium und im Leben selbst bedanken. Insbesondere bei meinem Onkel, da ich erst mit der sich mit dem Alter entwickelnden Vernunft wertschätzen gelernt habe, dass er mich von Kindesalter an zu kritischem Denken hinsichtlich aller Belange und den Naturwissenschaften versucht hat zu begeistern. Außerdem bei meiner Tante, die mir die Sprachen ans Herz legen wollte und meinem Vater, der mir beigebracht hat, meine Sturheit für etwas sinnvolles zu verwenden.

Anhang

A. Zur Biquadrik

Plausibilitätsrechnung
zur lokalen Einheitslängenfestlegung durch die Biquadrik (A.1)

Durch die Biquadrik $\hat{Q}_0^{\pm}$ aus Gleichung 2.7 mit $g_+ \stackrel{!}{=} 1 \stackrel{!}{=} g_-$ erhält man für die Dimension $(d+1) = 3$ des zugrundeliegenden Vektorraums die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Q_0^+ &: \; 0 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \\ Q_0^- &: \; 0 = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Linie $l_0 = (\pm 1, 0, 1)^T$ in $\pm\hat{e}_0 = (\pm 1 \cdot (\lambda = 1), 0, 0)^T$-Richtung durch das Center der Biquadrik auf der affinen Ebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$, die sich auf dem Aufpunktsvektor $\hat{e}_2 = (0, 0, 1)^T$ befindet und überprüfe ob diese Linie die Quadrik schneidet:

$$Q_0^+ : \; -(\pm 1)^2 + 0^2 + 1^2 \equiv 0$$

Eine weitere, anders orientiere Linie, ist durch $l_1 = (0, \pm 1, 1)^T$ gegeben und auch diese schneidet die Quadrik:

$$Q_0^- : \; -0^2 + (\pm 1)^2 - 1^2 \equiv 0.$$

Somit werden zwei Einheitslängen auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ durch die Biquadrik festgelegt, was in Abbildung 3 veranschaulicht wurde.

Betrachtet man nun die Gleichungen der Biquadrik $\hat{Q}_0^{\pm}$ aus Gleichung 2.7 mit $g_+ \stackrel{!}{=} 1 \stackrel{!}{=} g_-$ für die Dimension $(d+1) = 4$ des zugrundeliegenden Vektorraums:

$$\begin{aligned} Q_0^+ &: \; 0 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ Q_0^- &: \; 0 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \,. \end{aligned}$$

Weiter die Linie $l_0 = (\pm 1, 0, 0, 1)^T$, die mit:

$$Q_0^+ : \; -(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 \equiv 0$$

Einheitslängen entlang ihrer Vorwärts- und Rückwärtsrichtung festlegt. Hingegen die Linien $l_1 = (0, \pm 1, 0, 1)^T$ und $l_2 = (0, 0, \pm 1, 1)^T$ legen mit:

$$Q_0^- : \; -0^2 + (\pm 1_j)^2 + 0^2 - 1^2 \equiv 0 \; (\forall\, j = 1, 2)$$

zwei weitere Einheitslängen entlang ihrer jeweiligen Vorwärts- und Rückwärtsrichtungen

fest. Somit werden auch im Fall $(d+1) = 4$ auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^3$ ausreichend viele lokale Einheitslängen definiert (vgl. dazu Abb. A.1).

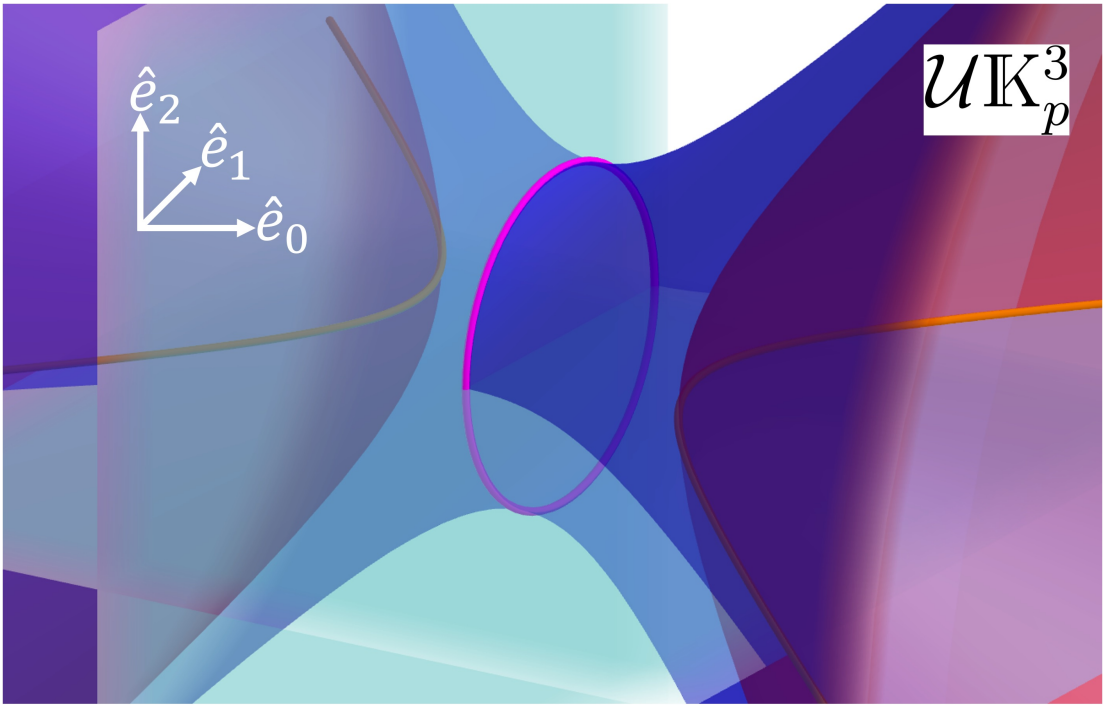


Abbildung A.1: Illustration, über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen, zur Längenfestlegung der Biquadrik auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^3$, dessen Aufpunktsvektor $\hat{e}_3$ nicht einzeichenbar ist (vgl. Gl. 2.3 & Bsp. 2.2). Die rote Quadrik ist durch $-1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ gegeben und die blaue durch $1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra.

Betrachtet man abschließend für die Dimension $(d+1)$ des zugrundeliegenden Vektorraums die durch $\hat{Q}_0^{\pm}$ aus Gleichung 2.7 mit $g_+ \overset{!}{=} 1 \overset{!}{=} g_-$ festgelegten Gleichungen:

$$Q_0^+ : \; 0 = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 + x_d^2$$

$$Q_0^- : \; 0 = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 - x_d^2.$$

Weiter die Linie $l_0 = (\pm 1_0, 0_1, \dots, 1_d)^T$, welche:

$$Q_0^+ : \; -(\pm 1)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} 0_i^2 + (1_d)^2 \equiv 0 \tag{A.2}$$

schneidet. Hingegen die Linien $l_j = (0_0, \dots, 0_{j-1}, \pm 1_j, 0_{j+1}, \dots, 0_{d-1}, 1_d)^T$ legen mit:

$$Q_0^- : \; -0^2 + \sum_{i=1}^{j-1} 0_i^2 + (\pm 1_j)^2 + \sum_{i>j}^{d-1} 0_i^2 - (1_d)^2 \equiv 0 \; (\forall\, j = 1, \dots, d-1) \tag{A.3}$$

$(d-1)$ weitere Einheitslängen entlang ihrer Vorwärts- und Rückwärtsrichtungen fest. Somit werden auch im Fall der Dimension $(d+1)$ des zugrundeliegenden Vektorraums auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ ausreichend viele lokale Einheitslängen definiert.

B. Zum Rechnen mit Projektivitäten

Satz B.1. Sei $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$. Sei weiter $\hat{T}_{\pm\hat{y}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{y} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \in T(d, \mathbb{K}_p)$, dann ist $\hat{T}_{\pm\hat{y}}$ ein Translationsoperator, der eine Translation von $\hat{x}$ um $\pm\vec{y}$ auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ durch $\hat{x} \oplus \hat{y} := \hat{T}_{\pm\hat{y}}\hat{x}$ bewirkt.
Beweis:

$$\hat{x} \oplus \hat{y} = \hat{T}_{\pm\hat{y}}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \pm \vec{y} \\ 1 \end{bmatrix} =: \hat{z} \tag{B.1}$$

Somit ist $\vec{z} := \vec{x} \pm \vec{y} \in \mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ und da $(\hat{z})_d = 1$ ist, wurde $\hat{x}$ um $\pm\vec{y}$ nach $\hat{z}$ auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ verschoben.

Satz B.2. Sei $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$. Sei weiter $\hat{T}_{\pm\hat{y}}$ ein Translationsoperator im Sinne von Satz B.1, dann ist:

$$\hat{x} \ominus \hat{x} = \hat{c} \tag{B.2}$$

Beweis:

$$\hat{x} \ominus \hat{x} = \hat{T}_{-\hat{x}}\hat{x} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & -\vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} - \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \hat{c}$$

□

Satz B.3. Sei $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$. Sei weiter $\hat{T}_{\pm\hat{y}}$ ein Translationsoperator im Sinne von Satz B.1, dann ist $\hat{c}$ das Neutrale Element bzgl. der Translation:

$$\hat{c} \oplus \hat{y} = \oplus\hat{y} \tag{B.3}$$

Beweis:

$$\hat{c} \oplus \hat{y} = \hat{T}_{\pm\hat{y}}\hat{c} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\vec{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \oplus\hat{y}$$

□

Satz B.4. Sei $\hat{x} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$. Sei weiter $\hat{T}_{\hat{x}}$ ein Translationsoperator im Sinne von Satz B.1, dann ist:

$$\hat{T}_{-\hat{x}} = \hat{T}_{\hat{x}}^{-1} \tag{B.4}$$

Beweis:

$$\hat{T}_{-\hat{x}}\hat{T}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & -\vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \vec{x} - \vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{d+1}$$

weiter ist nach Satz B.6

$$\hat{T}_{-\hat{x}}\hat{T}_{\hat{x}} = \hat{T}_{\hat{x}}\hat{T}_{-\hat{x}}$$

und somit auch

$$\hat{T}_{\hat{x}}\hat{T}_{-\hat{x}} = \mathbb{1}_{d+1}$$

□

Satz B.5. Sei $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$. Sei weiter $\hat{T}_{\hat{x}}$ ein Translationsoperator im Sinne von Satz B.1, dann ist:

$$\hat{T}_{-(\hat{x}\pm\hat{y})} = \hat{T}_{-\hat{x}}\hat{T}_{\mp\hat{y}} \tag{B.5}$$

Beweis:

$$\hat{T}_{-(\hat{x}\pm\hat{y})} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & -(\vec{x} \pm \vec{y}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & -\vec{x} \mp \vec{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{T}_{-\hat{x}}\hat{T}_{\mp\hat{y}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & -\vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \mp\vec{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \mp\vec{y} - \vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Satz B.6. Sei $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$. Sei weiter $\hat{T}_{\pm\hat{y}}$ ein Translationsoperator im Sinne von Satz B.1, dann kommutieren die Translationen:

$$\oplus\,\hat{x} \oplus \hat{y} = \oplus\,\hat{y} \oplus \hat{x}. \tag{B.6}$$

Beweis:

$$\oplus\,\hat{x} \oplus \hat{y} = \hat{T}_{\pm\hat{y}}(\oplus\,\hat{x}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm\vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\vec{x} \pm \vec{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\oplus\,\hat{y} \oplus \hat{x} = \hat{T}_{\pm\hat{x}}(\oplus\,\hat{y}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_d & \pm\vec{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm\vec{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\vec{y} \pm \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\vec{x} \pm \vec{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

C. Ergänzende Abbildungen zu Abschnitt 5

URL´s zu hochauflösenden Abbildungen

{1} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hJ5Z-f4cK1Z-F3wPGQ?e=CjoTMe

{2} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKhwgeWC0GtoorOQYQ?e=3AQqg6

{3} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKhvMajAAVDHTv5cfg?e=ch08VF

{4.1} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKkA_9MCjw2beAytNw?e=APdygf

{4.2} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKkBVpMZwfDZv3ETqA?e=awKdQt

{4.3} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKohEmk73bkbVEAPNg?e=akJ9Ze

{5} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKh4mHsfIQY4BBxyyQ?e=ecLDI1

{6} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKh5ugnLkibRXHzN8A?e=gw1SPP

{7} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKh6eUkkEBvwANLNtg?e=wzZj3o

{8} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKh7rbgjPf5sKY37YA?e=dszbQL

{9} https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8hKh8WoT7ZvPbwSld3Q?e=Sjeoi3

{10} https://www.geogebra.org/calculator/ug6wtb57

D. Algebraischer Beweis zur Punktspiegelungsmethode

Das Konzept zum dynamischen Constraint äußert sich geometrisch dadurch, dass mittels einer Geraden aus $\hat{x}_\tau$ durch $\hat{c}_{\tau+1}$ der Punkt $\hat{x}_{\tau+2}$ als Schnitt dieser Geraden $\vec{g}_\tau$ mit der Quadrik $Q_{\hat{c}_{\tau+1}}$ entsteht. Das heißt es gilt:

$$\vec{c}_{\tau+1} = \vec{x}_{\tau+1} + \vec{a}_{\tau+1} \tag{D.1}$$
$$\vec{g}(\lambda_\tau) = \vec{x}_\tau + \lambda_\tau \cdot (\vec{c}_{\tau+1} - \vec{x}_\tau) = \vec{x}_\tau + \lambda_\tau \cdot (\vec{x}_{\tau+1} + \vec{a}_{\tau+1} - \vec{x}_\tau) = \tag{D.2}$$
$$= \vec{x}_\tau + \lambda_\tau \cdot (\vec{u}_\tau + \vec{a}_{\tau+1}) =: \vec{x}_\tau + \lambda_\tau \cdot \vec{w}_{\tau,\tau+1}, \tag{D.3}$$

man vergleiche dazu Abbildung 15. Für das entsprechende λ_τ, das es zu bestimmen gilt, gilt dann, dass $\vec{g}(\lambda_\tau) \equiv \vec{x}_{\tau+2}$. Für diesen Punkt soll gelten, dass $\vec{x}_{\tau+2} \in Q_{\tau+1}$ ist:

$$0 = \hat{x}_{\tau+2}^T \hat{Q}_{\tau+1} \hat{x}_{\tau+2} = \tag{D.4}$$
$$= (\vec{x}_{\tau+2} - \vec{c}_{\tau+1})^2 + (gx_d)^2 \overset{\text{(D.3)}}{\underset{\text{(D.1)}}{=}} (\vec{x}_\tau + \lambda_\tau \cdot \vec{w}_{\tau,\tau+1} - \vec{x}_{\tau+1} - \vec{a}_{\tau+1})^2 + (gx_d)^2 = \tag{D.5}$$
$$= (\lambda_\tau \cdot \vec{w}_{\tau,\tau+1} - (\vec{u}_\tau + \vec{a}_{\tau+1}))^2 + (gx_d)^2 \overset{\text{(D.3)}}{=} (\lambda_\tau \cdot \vec{w}_{\tau,\tau+1} - \vec{w}_{\tau,\tau+1})^2 + (gx_d)^2 = \tag{D.6}$$
$$= ((\lambda_\tau - 1) \cdot \vec{w}_{\tau,\tau+1})^2 + (gx_d)^2 = (\lambda_\tau^2 - 2\lambda_\tau + 1) \cdot \vec{w}_{\tau,\tau+1}^2 + (gx_d)^2 \tag{D.7}$$
$$0 = \lambda_\tau^2 - 2\lambda_\tau + (1 + \frac{(gx_d)^2}{\vec{w}_{\tau,\tau+1}^2}) \tag{D.8}$$

Der Punkt $\hat{x}_\tau$ soll ebenfalls nach dem dynamischen Constraint Element von $Q_{\tau+1}$ sein:

$$0 = \hat{x}_\tau^T \hat{Q}_{\tau+1} \hat{x}_\tau = \tag{D.9}$$
$$= (\vec{x}_\tau - \vec{c}_{\tau+1})^2 + (gx_d)^2 = (\vec{x}_\tau - \vec{x}_{\tau+1} - \vec{a}_{\tau+1})^2 + (gx_d)^2 = \tag{D.10}$$
$$= (-\vec{u}_\tau - \vec{a}_{\tau+1})^2 + (gx_d)^2 = \vec{w}_{\tau,\tau+1}^2 + (gx_d)^2 \Longleftrightarrow \tag{D.11}$$
$$\Longleftrightarrow (gx_d)^2 = -\vec{w}_{\tau,\tau+1}^2 = -\vec{u}_\tau^2 - \vec{a}_{\tau+1}^2 = c^2 - \vec{a}_{\tau+1}^2 \neq const., \tag{D.12}$$

wobei $\vec{u} \cdot \vec{a} \equiv 0$ nach der SRT gilt. Somit folgt aus Gleichung (D.8):

$$0 = \lambda_\tau^2 - 2\lambda_\tau + (1 - \frac{\vec{w}_{\tau,\tau+1}^2}{\vec{w}_{\tau,\tau+1}^2}) = \tag{D.13}$$
$$= \lambda_\tau \cdot (\lambda_\tau - 2) \Longleftrightarrow \lambda_\tau \in \{\lambda_{\tau,-} = 0\,,\ \lambda_{\tau,+} = 2\}\,, \tag{D.14}$$

das heißt:

$$\vec{g}(\lambda_{\tau,-} = 0) = \vec{x}_\tau \in Q_{\tau+1} \tag{D.15}$$
$$\vec{g}(\lambda_{\tau,+} = 2) = \vec{x}_\tau + 2 \cdot (\vec{c}_{\tau+1} - \vec{x}_\tau) = \tag{D.16}$$
$$= 2 \cdot \vec{c}_{\tau+1} - \vec{x}_\tau \in Q_{\tau+1}, \tag{D.17}$$

was genau die Punktspiegelung darstellt, wenn man - wie es der dynamische Constraint verlangt - fordert, dass neben $\hat{x}_{\tau+2}$ auch $\hat{x}_\tau$ Element der Quadrik $Q_{\tau+1}$ ist.

E. Zum erstellten Python-Modul

Das Modul wurde selbst geschrieben, verwendet dabei aber auch übliche Python-Modulo wie Numpy, Matplotlib und andere, siehe Zelle Modulimport. Prinzipiell sind alle im Modul auftretenden Funktionen separat ansteuerbar. Das Modul hat den Namen "B_fpg_source_code .py" und ist in dem Ordner "download_me", der mit dem Link, der im Literaturverzeichnis in der Quelle [29] hinterlegt ist, abrufbar. Die Datei "A_use_modul.py" stellt dabei den "Eingabekopf" für die Verwendung des Moduls dar. Dieser ist in Zellen aufgebaut, welche aussagekräftige Namen haben und die dabei in der Reihenfolge angeordnet sind, wie auch die Ergebnisse dieser Arbeit in Abschnitt 5 und Abschnitt 6 angeordnet sind. Um das Modul und den Eingabekopf zu nutzen, sollte der Ordner "download_me"heruntergeladen werden und am gewünschten Ort auf dem PC abgelegt werden. Anschließend kann die Datei "A_use_modul.py" mit einer Python-IDE geöffnet werden, dabei sollte die Ordner-Struktur und die Namen der Ordner und Dateien nicht verändert werden, da das Arbeitsverzeichnis des Codes bzgl. der aktuellen Position auf der Festplatte automatisch angepasst wird. Außerdem empfiehlt es sich eine Python-IDE für das öffnen des Eingabekopfs zu nutzen, welche aus dem Code eine Inhaltsverzeichnis von diesem visualisiert, wie bspw. Spyder.

Die Hauptaufgabe des Codes ist eine übersichtliche Übergabe der wichtigsten Parameter und alles andere wird automatisch vom Code durch Fallstricke angepasst, sodass direkt entsprechend gewünschte Plots angefertigt werden. Der Code ist momentan für die Minkowski-Quadrik für $d \leq 4$ ausgelegt und Verschiebungen dieser auf der affinen Hyperebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^4$. Das Quadrikpolynom in Gleichung (5.1) wurde jeweils explizit ausgeschrieben. Daher muss man dem Quellcode eine analoge Struktur für eine beliebige andere Quadrik hinzufügen, in Form einer Funktion, wenn man analoge Analysen, die in Abschnitt 5 gemacht wurden, für eine andere Quadrik durchführen möchte (vgl. die Funktion "construct_q" im Modul). Das explizite ausschreiben des Polynoms aus Gleichung (5.1) bzw. der Version davon, die entsteht mit einer Verschiebung der Quadrik, hat den Vorteil, dass nicht der Rechner Matrixmultiplikationen ausführen muss, was die Rechenzeit erheblich verkürzt. Denn wenn bspw. $p = 151$ für $\mathbb{K}_p$ gewählt wird, liegen für $d = 4$ bereits $p^5 \approx 7.8 \cdot 10^{10}$ Punkte vor, die jeweils im Plus- und Minuspolynom in Gleichung (5.1) überprüft werden müssen, ob sie es erfüllen. Die Zellen 0 bis einschließlich 4 gehören zum Abschnitt 5 und die restlichen Zellen gehören zum Abschnitt 6.

Abbildungsverzeichnis

1. In Abb. 1.1 sind die Punkte des $\mathbb{K}_3^3$ in blau aufgetragen. In Abb. 1.2 sind drei Äquivalenzklassen nach Definition 2.11 mit durchgezogenen roten Linien angedeutet. Abb. 1.3 zeigt die nach Gleichung (2.3) gewählte Konvention, wobei drei Repräsentanten der drei Äquivalenzklassen aus Abb. 1.2 beispielhaft in rot eingezeichnet sind. Dabei wurden ihnen normierte homogene Koordinaten entsprechend nach Gleichung (2.3) zugewiesen. Abb. 1.4 zeigt eine alternative Konvention. In Abb. Abb. 1.5 sind Punkte des $\mathbb{K}_5^3$ aufgetragen, welche nach Wahl der homogenen Koordinaten nach Gleichung (2.3) in Abb. 1.6 (rote Punkte) übergehen. In Abb. 1.6 sind mit grünen Linien Zentralprojektionen angedeutet, welche die gewählten Repräsentanten (rote Punkte) nach Gleichung (2.1) auf ein anderes Element innerhalb der jeweiligen Äquivalenzklasse überführen. Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint. 7
2. Links: Der projektive Raum $\mathcal{P}\mathbb{K}_3^2$ eingebettet im $\mathbb{K}_3^3$-Vektorraum. Rechts: Die gleiche projektive Geometrie repräsentiert durch Punkte und Linien. Quelle: [14] 9
3. Abb. 3.1: Der rote Kegel stellt die Lösungsmenge der Gleichung $0 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ (I) über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen dar und der blaue Kegel stellt entsprechend die Lösungsmenge der Gleichung $0 = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ (II) dar. Weiter ist mit schwarzen Punkten der $\mathcal{P}\mathbb{K}_3^2$ dargestellt. Der Schnitt der Lösungsmenge der Gleichungen (I) & (II) (rote und blaue Kegel) mit der Ebene, also dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_3^2$ legt Einheitslängen bzgl. dem Center (schwarzer Punkt auf der x_2-Achse) fest und ist mit Hyperbelpaaren, in orange und violett angedeutet. Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra. Abb. 3.2: Simulation der Biquadrik mit Minkowski-Signatur (Gleichungen (I) & (II)) mit Hilfe einer $\mathbb{Z}$-Näherung für $p = 11251$ (vgl. Quelle: [17]). 10
4. Links: Die affine Ebene $\mathcal{U}\mathbb{K}_3^2$ und eine Quadrik in rot. Rechts die gleiche Ebene mit einer Biquadrik in rot und blau, sodass jede Linie durch das Center zwei Schnitte mit der Biquadrik besitzt. Die Quadriken sind gestrichelt angedeutet, da sie selbst nur aus diskreten Punkten über einem endlichen Körper $\mathbb{K}_3$ bestehen. Quelle: [6] 13
5. Illustration zu den Gleichungen (3.3) & (3.4). Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint. 18
6. Illustration zu den Gleichungen (3.7) & (3.8) und der Definition 3.4. Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint. 20

7. Illustration zum kinematischen und dynamischen Constraint. Abb. 7.1: Das blaue Kegelpaar stellt die Lösungsmenge der Gleichung (3.10) über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen dar, mit den willkürlichen Werten $a_0 = -0.5$ und $a_1 = 0.6$. Das rote Kegelpaar stellt entsprechend die Lösungsmenge der Gleichung dar, die sich aus Gleichung (3.10) mit $a_0 = 0 = a_1$ ergibt. Die orangenen bzw. violetten Hyperbelpaare sind die Schnitte der Quadriken $\hat{Q}_0^+$ bzw. $\hat{Q}_{\hat{a}}^+$ mit dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ (obere graue Fläche in Abb. 7.1). Abb. 7.2: Vogelperspektive von Abb. 7.1, wobei ausgewählte Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^2$ auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^2$ mit $\odot$ markiert wurden, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Ebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra. 23
8. Zur Illustration einer Tangentenschar an eine Funktion f. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra. 24
9. Illustration zu den Gleichungen (4.4), (4.5), (4.6) und dem Sachverhalt zwischen Normalenvektor $(\vec{v}^*\big|_{\vec{v}}, 1)^T$ und den Tangentialvektoren $(-\vec{e}_i, \partial_{v_i} f\big|_{\vec{v}})$. Dabei ist die Zeichenebene auf abstrakte Weise stellvertretend für den $\mathbb{R}^d$ zu verstehen und die x_d-Achse ragt aus der Zeichenebene heraus $(i = 0, \dots, d-1)$. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra. 27
10. Lösungen der Minkowski-Quadrik $Q_0^\pm$ für Primzahlen p und Höhen x_2, Lichtkegel L_c. Links: $x_2 = 1$. Rechts: Diverse x_2. Höhere Auflösung unter Link {1}. 35
11. Minkowski-Quadrik $Q_0^\pm$. Links: Lösungen aller Höhen in einer Ebene dargestellt, für die jeweiligen $p = 151, 503, 1091$. Rechts ist durch Rotation der entsprechenden Punkte, wie im Absatz zu Gleichung (5.5) beschrieben, aus dem zugehörigen linken Plot entstanden. Höhere Auflösung unter Link {3}. 37
12. Minkowski-Quadrik $Q_0^\pm$, Lichtkegel L_c. Verhalten der Äquivalenzklassen über die Höhen hinweg lässt sich durch den ihnen zugeordneten Nummern nachverfolgen. Höhere Auflösung unter Link {6}. 39
13. Links: Zur Punktspiegelung. Die Punkte auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$, welcher auf abstrakte Weise als Zeichenebene dargestellt wird, wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Rechts: Zur Höhenskalierung. Die Linien zu den verschiedenen Höhen sind auf abstrakte Weise stellvertretend für den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ zu verstehen. Die sich über $\mathbb{K}_p$ ergebende Gerade sieht nicht wie hier dargestellt geradlinig aus (vgl. Abbildung 12). Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint. 42
14. Minkowski-Quadrik $Q_0^\pm$, Lichtkegel L_c. Lösungen aller Höhen in einer Ebene dargestellt, über links: $\mathbb{Z}_{z_0}$ und rechts: $\mathbb{Q}_{z_0}$. Höhere Auflösung unter Link {7}. 42
15. Zur Erfassung des dynamischen Constraint für ein nummerisch iteratives Programm. Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint. 44
16. Zur Deckungsgleichheit von Quadrikpunkten von zu einander verschobenen Quadriken. Darstellung des $\mathbb{K}_p$, wobei die Linien zu den verschiedenen Höhen auf abstrakte Weise stellvertretend für den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ zu verstehen sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint. 46

17. Zur Gewährleistung des dynamischen Constraint für ein nummerisch iteratives Programm. Vektoren des $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ sind in einer Ebene gezeichnet, was nicht heißen soll, dass sie tatsächlich in der Zeichenebene liegen müssen. Denn die Zeichenebene soll auf abstrakte Weise den $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^d$ repräsentieren. Die Punkte des $\mathcal{P}\mathbb{K}_p^d$ wurden mit $\odot$ markiert, was nicht heißen soll, wie üblich in der Physik, dass es senkrechte Vektoren (Äquivalenzklassen) auf die Zeichenebene sind. Quelle: selbst angefertigt mit PowerPoint. 47
18. Ort und Geschwindigkeit über τ. Vorgegebene Startgeschwindigkeit $u_1 = -7$. $A_{x_1}^{\pm}$ & $A_{u_1}^{\pm}$ bezeichnen die mittlere positive bzw. negative Amplitude. $T_{x_1}^{\pm}$ & $T_{u_1}^{\pm}$ bezeichnen die mittleren Maxima bzw. Minima Abstände in Einheiten von τ. Höhere Auflösung unter Link {8}. 50
19. Links: Nenner über quadratischer Periodendauer zur Verifizierung der Gleichung (6.6). Jeweils für die mittleren Periodendauern über 3000 τ-Schritte, die aus den positiven Ortsamplituden Abständen bzw. negativen ermittelt wurden. Rechts: Positive Ortsamplituden bzw. negative über den Periodendauern, die aus den positiven Ortsamplituden Abständen bzw. negativen ermittelt wurden. In beide Plots wurde jeweils für den plus und minus Fall eine Gerade $f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ gefittet. Höhere Auflösung unter Link {8}. . 51
20. Iterativ erzeugte x_0 Koordinate durch τ dividiert und neben iterativ erzeugtem u_0 und γ aufgetragen. Höhere Auflösung unter Link {8}. 52
21. Gesamtenergie als Summe von kinetischer und potentieller des HO im Makro-Limes nach Gleichung (6.8). Höhere Auflösung unter Link {8}. . . . 53
22. Werte von $(gx_d)^2$ nach Gl. (6.5) berechnet aus den iterativ erzeugten Daten mittels Punktspiegelung und aufgetragen über τ, mit $g = 1$. Höhere Auflösung unter Link {8}. 54
23. Die sich durch die Newton-Quadrik ergebenden $x_{2,\pm}$-Verläufe über τ. Höhere Auflösung unter Link {8}. 56
24. Werte von $(gx_d)^2$ nach Gl. (6.5) berechnet aus den iterativ erzeugten Daten mittels Punktspiegelung und aufgetragen über τ, mit $u_1(\tau = 0) \approx 0.967\,c$ und $g = 1$. Weiter sind die x_1 und u_1 Verläufe für die gleichen Parameter aufgetragen, welche keine Attraktoren aufweisen. Höhere Auflösung unter Link {9}. 58
25. x_1, u_1, E und γ Verläufe mit τ für $u_1(\tau = 0) \approx 0.967\,c$ und $g = 1$. Höhere Auflösung unter Link {10}. 59
A.1. Illustration, über - aus illustrativen Zwecken - den reellen Zahlen, zur Längenfestlegung der Biquadrik auf dem $\mathcal{U}\mathbb{K}_p^3$, dessen Aufpunktsvektor $\hat{e}_3$ nicht einzeichenbar ist (vgl. Gl. 2.3 & Bsp. 2.2). Die rote Quadrik ist durch $-1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ gegeben und die blaue durch $1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Quelle: Selbst angefertigt mit PowerPoint und GeoGebra. 65

Literatur

[1] Mecke Klaus. *Raum - Zeit - Materie.* ;Seite 9, zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://theorie1.physik.uni-erlangen.de/media/pdf/publications/finites_weltbild-kurzfassung.pdf.

[2] Johann Wolfgang von Goethe. *Faust I.* ;Zeile 382, zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://de.wikisource.org/wiki/Seite:Faust_I_(Goethe)_034.jpg.

[3] CWoo. *Axiomatic projective geometry.* ;hosted by University of Waterloo Faculty of Mathematics, zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://planetmath.org/axiomaticprojectivegeometry.

[4] Neeb Karl-Hermann. *Analysis 1 - WS 2019/20.* Vorlesung. Friedrich-Alexander-Universität, 2020.

[5] Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie: Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen.* Vieweg & Sohn Verlag. ; 2. Auflage. Wiesbaden, 2004.

[6] Laska Alexander. *Biquadric Fields: Equipping Finite Projective Spaces With Metrik Structure.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://theorie1.physik.uni-erlangen.de/media/pdf/theses/2014-ma-alaska.pdf.

[7] Wikipedia. *Schiefkörper.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Schiefk%C3%B6rper.

[8] Sanderson Yasmine. *Lineare Algebra 1 - WS 2019/20.* Vorlesung. Friedrich-Alexander-Universität.

[9] Hilbert David. *Grundlagen der Geometrie.* ;B. G. Teubner, 2.Auflage 1903, zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich/page/n81/mode/2up.

[10] Mecke Klaus. *Biquadrics configure finite projective geometry into a quantum spacetime.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/120/10007/pdf.

[11] Laurent Hoeltgen. *Konstruktion und Struktur endlicher Körper.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://www.mia.uni-saarland.de/hoeltgen/FiniteFields.pdf.

[12] Deiser Oliver. *Einführung in die Mathematik 2.2.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=ema22_3_5_Z4.

[13] Wikipedia. *Restklassenkörper modulo einer Primzahl.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Restklassenk%C3%B6rper#Restklassenk%C3%B6rper_modulo_einer_Primzahl.

[14] Klede Kai. *Ising model on finite projective geometries.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://theorie1.physik.uni-erlangen.de/media/pdf/theses/2018_ba_kklede.pdf.

[15] Wikipedia. *Affiner Unterraum.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Affiner_Unterraum.

[16] Emad Bakr Al-Zagana. *Finite Projective Geometry and Its Applications.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://uomustansiriyah.edu.iq/media/lectures/6/6_2017_12_16!02_02_56_AM.PDF.

[17] Simon Florian. *Klassische Mechanik auf finiten projektiven Geometrien.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://theorie1.physik.uni-erlangen.de/media/pdf/theses/2020_ba_fsimon.pdf.

[18] Sanderson Yasmine. *Lineare Algebra 2 - SS 2020.* Vorlesung. Friedrich-Alexander-Universität.

[19] Reinhart Tobias. *Lorentz-Transformationen in endlichen Raumzeiten.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://theorie1.physik.uni-erlangen.de/media/pdf/theses/2016-ba-treinhart.pdf.

[20] Ganzhorn Kathrin. *Bilinearformen, euklidische und unitäre Vektorräume, normale Endomorphismen.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://www.ph.tum.de/academics/bsc/break/2010w/fk_MA9201_05_course.pdf.

[21] Anton Howard. *Lineare Algebra - Einführung - Grundlagen - Übungen.* Spektrum, Akad. Verl. Heidelberg; Berlin; Oxford, 1995.

[22] Mecke Klaus. *Legendre Transformation.* Friedrich-Alexander-Universität.

[23] Mecke Klaus. *Space - Time - Matter Finite Projective Geometry as a Quantum World with Elementary Particles.* Theorie Kolloquium Köln, 15. Nov. 2019. ;Folien 4&5.

[24] Mecke Klaus. *Finite Projective Mechanics.* Friedrich-Alexander-Universität.

[25] Leifhelm Alexander. *Die Legendre-Transformation als geometrisches Mittel der Variablentransformation in der Physik.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/archive/fileadmin/lehre/Physik_II_SS_15/Die_Legendre-Transformation_als_anschauliches_Mittel_der_Variablentransformation_in_der_Physik.pdf.

[26] Klein H. *Mathematik für Ingenieure II, SS 2009, Uni-Kiel, §9 Differentialrechnung für Funktionen in n Variablen, 10.07.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://www.math.uni-kiel.de/geometrie/klein/ingss9/fr1007.pdf.

[27] Wikipedia. *Hyperebene - Weitere Darstellungen.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Hyperebene#Weitere_Darstellungen.

[28] Pappas Richard C. *Projective Quadrics, Poles, Polars and Legendre Transformations.* Widener University Chester. PA 19013 USA.

[29] Henning Frank Ulrich. *Quellcode der nummerischen Simmulationen.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://1drv.ms/f/s!AkJRcmt503q8grMBmUwhYW2L-tTRZg?e=9XYMf7.

[30] Wikipedia. *Attraktor.* ;zuletzt aufgerufen am: 17.08.2023. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Attraktor.